



Tentamen Maat- en Integratietheorie

[illegible]

Opgave 1. Zij m^* de uitwendige maat bij de Lebesgue-premaat m op de halfring $\mathcal{H}$ der cellen in $\mathbb{R}$.

- (i). Bepaal $m^*(\mathbb{Q})$ direct met de definitie van m^* .
- (ii). Leg kort uit (geen bewijzen) hoe m^* leidt tot de Borel-maat op $\mathcal{Bor}(\mathbb{R})$.
- (iii). Bewijs: m^* is niet eindig-additief op $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Aanwijzing: $\mathcal{L}eb(\mathbb{R}) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Opgave 2. Zij $\mathcal{H}$ een halfring in een verzameling V .

- (i). Formuleer de *éénduidigheidsstelling* voor maten op de σ -algebra $\sigma(\mathcal{H})$.

We onderzoeken wat (i) te zeggen heeft voor *eindige* maten μ op $\sigma(\mathcal{H})$: $\mu(V) < \infty$.

- (ii). Geef, ingeval $V = \mathbb{R}$ en $\mathcal{H} = \{\{x\} : x \in V\} \sqcup \{\emptyset\}$, een voorbeeld van een eindige maat μ op $\sigma(\mathcal{H})$ die niet σ -eindig is op $\mathcal{H}$.
- (iii). Zoals wellicht bekend, kan de door $\mathcal{H}$ voortgebrachte *algebra* $a(\mathcal{H})$ als volgt beschreven worden: $a(\mathcal{H}) = \{A \subset V : A \text{ of } A^c \text{ is een edv-}\mathcal{H}\}$. Laat hiermee zien dat voor *eindige* maten μ en ν op $\sigma(\mathcal{H})$:

$$\mu = \nu \text{ op } \mathcal{H} \sqcup \{V\} \implies \mu = \nu \text{ op } a(\mathcal{H}).$$

- (iv). Een combinatie van (iii) en (i), met in (i) een geschikte keuze voor $\mathcal{H}$, leidt tot een *éénduidigheidsstelling* voor *eindige* maten op $\sigma(\mathcal{H})$. Laat dit zien, en geef een duidelijke formulering van deze (nieuwe) stelling.

Opgave 3. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte.

- (i). Bewijs de volgende bekende eigenschap van een functie $f : V \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$:

$$f \text{ integreerbaar} \implies f \text{ eindig } \mu\text{-b.o.}$$

Aanwijzing: Breng voor $n \in \mathbb{N}$ de μ -maat van $\{|f| \geq n\}$ in verband met $\int_V |f| \, d\mu$.

- (ii). Formuleer voor een rij (g_n) van meetbare functies op V de overal-versie van de MCS en de bijna-overal-versie van de GCS.
- (iii). Bewijs met behulp van (i) en (ii) de volgende eigenschap van een rij (f_k) van integreerbare, $\mathbb{R}$ -waardige functies op V :

Als $\sum_{k=1}^{\infty} \int_V |f_k| d\mu < \infty$, dan is de reeks $\sum_{k \geq 1} f_k$ μ -b.o. (absoluut) convergent en de functie g , met $g := \sum_{k=1}^{\infty} f_k$ waar de reeks convergeert en $g := 0$ elders, is integreerbaar met

$$\int_V g \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_V f_k \, d\mu.$$

Opgave 4.

- (i). Zij $g : (V, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (W, \mathcal{B})$ een meetbare functie, en zij ν de beeldmaat van μ onder g . Bewijs dan (in drie stappen) de bekende eigenschap (*substitutie-regel*) dat voor meetbare $f : W \rightarrow \mathbb{R}_+$: $\int_W f \, d\nu = \int_V f \circ g \, d\mu$.

Zij $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ gedefinieerd door $G(x) := 0$ als $x < 0$, en $:= \sqrt{x}$ als $x \geq 0$, en zij m_G de door G geïnduceerde Stieltjes-maat op $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

- (ii). Zij ν de beeldmaat van m_G onder G . Bepaal $\nu(\{0\})$ en $\nu((a, b])$ voor $0 \leq a < b$. Wat is ν nu voor maat, en waarom?
- (iii). Zij $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ meetbaar. Laat zien dat $I := \int_{\mathbb{R}_+} f(\sqrt{x}) (1/\sqrt{x}) \, dx$ geschreven kan worden als een integraal naar m_G , en bewijs vervolgens met behulp van (i) en (ii) dat $I = 2 \int_{\mathbb{R}_+} f(y) \, dy$.
- (iv). Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ meetbaar. Het voorgaande suggereert de volgende gelijkheid:

$$\int_{\mathbb{R}} f(F(x)) \, dF(x) = \int_{(r,s)} f(y) \, dy,$$

voor rechts-continue, stijgende functies $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met $F(-\infty) = r$, $F(\infty) = s$. Laat echter zien dat de gelijkheid niet voor al dergelijke F geldt.

Opgave 5. Beschouw de maatruimte $(U, \mathcal{B}, m_2)$ met U de rechthoek $[1, \infty) \times [0, 1]$ in $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}$ de Borel- σ -algebra in U , en m_2 de Borel-maat. Definieer $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$f(x, y) := 2e^{-2xy} - e^{-xy} \quad [(x, y) \in U].$$

We willen onderzoeken of f integreerbaar is naar m_2 , en schrijven daartoe het positieve deel f^+ van f als $f^+ = f 1_C$ met $C := \{(x, y) \in U : f(x, y) \geq 0\}$.

- (i). Waarom is f Borel-meetbaar? En waarom volgt hieruit dat $C \in \mathcal{B}$? Bepaal voorts C expliciet als deel van U en schets C (en U) in een figuur; bedenk hierbij dat $\alpha := \log 2 < 1$.
- (ii). Bepaal voor $x \geq 1$ de x -sectie C_x van C , en laat met behulp hiervan zien dat f^+ een oneindige integraal heeft: $\int_U f^+ \, dm_2 = \infty$.
- (iii). Waarom is f niet integreerbaar? Kan de integraal van f nog wel bestaan? Zo ja, wat zou dan moeten gelden?

○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○

NORMERING:	1 (i): 2	2 (i): 1	3 (i): 2	4 (i): 3	5 (i): 2	TOTAAL:
	(ii): 2	(ii): 2	(ii): 2	(ii): 3	(ii): 4	38 punten!
	(iii): 2	(iii): 3	(iii): 5	(iii): 2	(iii): 1	
	<u> </u>	(iv): <u>1</u>	<u> </u>	(iv): <u>1</u>	<u> </u>	EINDCIJFER:
	6	7	9	9	7	$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal}$.

○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○