



Opgave 2. Geef de definitie van een *ring* $\mathcal{R}$ in V , en laat hiermee zien dat met A en B ook $A \setminus B$ en $A \cup B$ tot $\mathcal{R}$ behoren. (2)

Opgave 3. Laat $\mathcal{C} = \{C_i : i \in \mathbb{N}\}$ een partitie zijn van V , dus de C_i -en zijn niet-leeg en disjunct met $\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i = V$. Zij $\mathcal{H} := \mathcal{C} \sqcup \{\emptyset\}$. Laat zien dat $\mathcal{H}$ een halfring is in V , en beschrijf de σ -algebra $\sigma(\mathcal{H})$ in termen van de partitionerende verzamelingen C_i met $i \in \mathbb{N}$. Antwoord volstaat. (2)

Opgave 4. Zij $\mathcal{C}$ de collectie van alle intervallen van de vorm $(-\infty, b)$ met $b \in \mathbb{R}$. Laat slechts met behulp van de *definitie* van $\mathcal{B}or(\mathbb{R})$ zien dat $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}or(\mathbb{R})$. (3)

Opgave 5. Formuleer expliciet en bewijs de bekende eigenschap dat $\mathcal{Bor}(\mathbb{R})$ gesloten is onder *translaties*. (2)

Opgave 6. Zij $\mathcal{R}$ een *ring* in V , en zij μ een $\overline{\mathbb{R}}_+$ -waardige functie op $\mathcal{R}$ met μ niet constant ∞ . Bewijs dat μ een premaat is op $\mathcal{R}$ zodra μ eindig-additief is en continu van beneden. (2)

Opgave 7. Zij m de Lebesgue-premaat op de halfring $\mathcal{H}$ der cellen in $\mathbb{R}$. Geef de definitie van de *uitwendige maat* m^* bij m en $\mathcal{H}$, en bepaal, direct met deze definitie, $m^*(E)$ voor $E := [0, 1] \cap \mathbb{Q}$. (3)

Opgave 8. Zij μ^* de uitwendige maat bij een premaat μ op een halfring $\mathcal{H}$ in V . Zoals bekend, is $\mu^* = \mu$ op $\mathcal{H}$ en is μ^* sub-additief. Bewijs nu met behulp hiervan de bekende eigenschap dat elke $E \in \mathcal{H}$ μ^* -meetbaar is. Welke relatie volgt hieruit tussen de σ -algebra $\sigma(\mathcal{H})$ en de σ -algebra $\mathcal{H}_\mu$ der μ^* -meetbare verzamelingen? (3)

Opgave 9. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Veronderstel dat $E \subset V$ ‘zwak gemengd’ wordt door verzamelingen uit $\mathcal{A}$ in de zin dat

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset E \subset B \text{ en } \mu(B \setminus A) < \varepsilon.$$

Laat zien dat E dan ook ‘sterk gemengd’ wordt in de zin dat

$$\exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset E \subset B \text{ en } \mu(B \setminus A) = 0. \quad (2)$$

