

- (i). Bewijs de bekende eigenschap dat $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$.
- (ii). Geef (zonder bewijs) in termen van $\mathcal{C}$ bij een functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een voortbrengende collectie van de inverse-beeld- σ -algebra $f^{-1}(\mathcal{B})$, en laat daarmee zien dat f meetbaar is (m.b.t. $\mathcal{B}$) als en alleen als $\{f \geq a\} \in \mathcal{B}$ voor alle $a \in \mathbb{R}$.
- (iii). Laat met behulp van (ii) zien dat het infimum $f := \inf_n f_n$ van een rij meetbare functies van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{R}_+$ weer meetbaar is. Geef kort aan hoe op soortgelijke wijze de meetbaarheid van $g := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ bewezen kan worden.

$$f_n(x) := \left\{ 1 + \left(\frac{|x|}{n} \right)^\alpha \right\}^n \quad [x \in \mathbb{R}].$$

(iv). Laat $\alpha < 1$. Laat dan met behulp van het feit dat $\{\log(1+t)\}/t \rightarrow 1$ als $t \rightarrow 0$ zien dat $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \infty$ voor $x \neq 0$, en bepaal vervolgens met behulp van het lemma van Fatou de limiet $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(-1,1)} f_n \, d\mu$.

(v). Bepaal $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{(-1,1)} f_n \, d\mu$ ook ingeval $\alpha = 1$.

(i). Laat (kort) met de éénduidigheidsstelling voor maatuitbreiding zien dat de beperking van m_F tot $(0, \infty)$ absoluut-continu is (t.o.v. m). Met welke dichtheid?

(ii). Waarom is C Borel-meetbaar? Bepaal voor $x > 0$ de x -sectie C_x van C , en voor $y > 0$ de y -sectie C^y van C .

$$I := \int_{(0,\infty)} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right)^2 dx.$$

NORMERING:	1 (i): 2	2 (i): 2	3 (i): 2	4 (i): 2	TOTAAL:
	(ii): 2	(ii): 3	(ii): 1	(ii): 2	38 punten!
	(iii): 3	(iii): 3	(iii): 1	(iii): 3	
	(iv): 3	(iv): 1	(iv): 2		EINDCIJFER:
	(v): <u>3</u>		(v): <u>3</u>		$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$
	13	9	9	7	

○ ● * ★ . ★ * ● ○ . ○ ● * ★ . ★ * ● ○ . ○ ● * ★ . ★ * ● ○ . ○ ● * ★ . ★ * ● ○ . ○ ● * ★ . ★ * ● ○ . ○ ● * ★ . ★ * ● ○