



Voortentamen Maat- en Integratietheorie

○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○

Opgave 1. Beschouw, in een verzameling V , een *halfkring* $\mathcal{H}$. Wat betekent dit (per definitie) voor $\mathcal{H}$? Als $A, B \in \mathcal{H}$, wat geldt dan voor $A \setminus B$? Hoe kunnen we dit generaliseren? Antwoorden volstaan. (2)

Opgave 2. Zij $\mathcal{H}$ een *halfring* in een verzameling V . Laat met behulp van opgave 1 zien dat elke *ev*- $\mathcal{H}$ ook *edv*- $\mathcal{H}$ is. (1)

Opgave 3. Zij $\mathcal{H}$ een *halfring* in V , en zij $\mathcal{A} := \{A \subset V : A \text{ of } A^c \text{ is edv-}\mathcal{H}\}$.

(i). Bewijs met behulp van opgaven 1 en 2 dat $\mathcal{A}$ een *algebra* is. (3)

(ii). $\mathcal{A}$ is voor $\mathcal{H}$ een heel speciale algebra. In welk opzicht? (1)

Opgave 4. Zij $V \subset W$, en zij $\mathcal{B}$ een σ -algebra in W . Welke σ -algebra $\mathcal{A}$ kiezen we dan vaak in V ? En als $\mathcal{B}$ wordt voortgebracht door de halfring $\mathcal{H}$, door welke halfring wordt $\mathcal{A}$ dan voortgebracht? Antwoorden volstaan. (1)

Opgave 5. Zij $\mathcal{C}$ de collectie van alle intervallen van de vorm $(-\infty, b)$ met $b \in \mathbb{R}$. Laat slechts met behulp van de *definitie* van $\mathcal{B}or(\mathbb{R})$ zien dat $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}or(\mathbb{R})$. (3)

Opgave 6. Formuleer expliciet en bewijs de bekende eigenschap dat een niet-negatieve, eindig-additieve functie μ op een ring $\mathcal{R}$ in V *eindig-sub-additief* is; gebruik hierbij de monotonie van μ . (2)

Opgave 7. Zij μ een premaat op een halfring $\mathcal{H}$ in V . Geef de definitie van de *uitwendige maat* μ^* bij μ en $\mathcal{H}$, en bewijs de bekende eigenschap dat $\mu^*(E \cup F) \leq \mu^*(E) + \mu^*(F)$ voor $E, F \subset V$. (3)

Opgave 8. Zij V overaftelbaar, laat $\mathcal{H}$ de halfring zijn van alle singletons in V , en laat μ op $\mathcal{H}$ gedefinieerd zijn door $\mu(\{x\}) = 1$ voor $x \in V$.

(i). Laat zien dat μ een premaat is op $\mathcal{H}$. (1)

(ii). Bepaal de σ -algebra $\mathcal{H}_\mu$ der μ^* -meetbare verzamelingen. (2)

Opgave 9. Beschouw in $\mathbb{Q}$ de halfring $\mathcal{H}$ der $\mathbb{Q}$ -cellen $(a, b]_{\mathbb{Q}} := (a, b] \cap \mathbb{Q}$ met $a, b \in \mathbb{Q}$, en zij μ de premaat op $\mathcal{H}$ met $\mu(A) = \infty$ voor alle $A \in \mathcal{H}$ met $A \neq \emptyset$. Bepaal de σ -algebra $\sigma(\mathcal{H})$ en de Carathéodory-voortzetting μ op $\sigma(\mathcal{H})$. Zijn er nog andere maten ν op $\sigma(\mathcal{H})$ met $\nu = \mu$ op $\mathcal{H}$? (3)

(2)

- (2)

(2)

- (3)

(1)

(2)

(2)

(1)

een

1)

3)

TOTAAL AANTAL PUNTEN: $\Sigma = 40$. EINDCIJFER: $V = \frac{1}{4} \times \Sigma$.

○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○