

[illegible]

(i). Zij $x \in V$. Is $\{x\} \in r(\mathcal{H})$? Is $\{x\} \in \sigma(\mathcal{H})$? Bepaal $\sigma(\mathcal{H})$.

(ii). Bepaal $\mu^*(\{x\})$ voor $x \in V$. Wat is nu $\mu^*(E)$ voor $E \subset V$?

(iv). Zoals bekend, is μ^* een maat op $\sigma(\mathcal{H})$ met $\mu^* = \mu$ op $\mathcal{H}$. Is μ^* de enige maat met deze eigenschap?

(v). Als ν een premaat op $\mathcal{H}$ zou zijn, wat zou dan de maat zijn die de Carathéodory-voortzetting van ν op $\sigma(\mathcal{H})$ toekent aan $\{x\}$ met $x \in V$? Waarom kan dat niet?

(vi). Laat door middel van een concreet tegenvoorbeeld zien dat ν niet σ -sub-additief is op $\mathcal{H}$.

(i). Bewijs dat voor een meetbare, niet-negatieve functie ϕ op V :

Aanwijzing: beschouw $\int_V \phi \, d\mu$ en splits het integratiegebied V met behulp van ϕ in twee stukken.

(ii). Wat betekent het dat $f_n \xrightarrow{\mu} f$, d.w.z. dat f_n *in maat* naar f convergeert? Welke rol speelt hier de gegeven meetbaarheid der functies?

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \text{ en } f_n \xrightarrow{\mu} g \implies f = g \text{ } \mu\text{-b.o.}$$
$$\int_Y |f_n - f| d\mu \longrightarrow 0 \implies f_n \xrightarrow{\mu} f,$$

en laat zien dat de omgekeerde implicatie niet voor alle maatruimten waar is.

de functie $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$\phi(u) := \int_{\mathbb{R}} \cos ux \, \mu(\mathrm{d}x) \quad [u \in \mathbb{R}_+].$$

- (i). Laat zien dat voor $u \in \mathbb{R}_+$ de integraal $\phi(u)$ wel-gedefinieerd en eindig is, en voldoet aan $|\phi(u)| \leq 1$.
- (ii). Laat zien dat $1 - \phi(u) = \int_{\mathbb{R}} (1 - \cos ux) \mu(dx)$, en bepaal de limiet hiervan voor $u \downarrow 0$ (langs een rij (u_n)). Conclusie?

We willen laten zien dat eindigheid van het *tweede moment* $b := \int_{\mathbb{R}} x^2 \mu(\mathrm{d}x)$ van μ als volgt in termen van ϕ gekarakteriseerd kan worden:

$$a := \lim_{u \downarrow 0} \frac{1 - \phi(u)}{u^2} \text{ bestaat in } \mathbb{R} \iff b < \infty. \quad (*)$$

- (iii). Formuleer het *lemma van Fatou* voor een functie-rij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ op $(\mathbb{R}, \text{Bor}(\mathbb{R}), \mu)$, en bewijs ‘ $\implies$ ’ in (*) met behulp hiervan en van (ii).
- (iv). Formuleer de *gedomineerde convergentiestelling* voor een functie-rij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ op $(\mathbb{R}, \text{Bor}(\mathbb{R}), \mu)$, en bewijs ‘ $\impliedby$ ’ in (*) met behulp hiervan en van (ii).
- (v). Druk, ingeval a of b eindig is, b uit in a .

Opgave 4. Laat, voor $n \in \mathbb{N}$, de functie $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ gedefinieerd zijn door

$$f_n(x) := e^{-nx^2} \quad [x \geq 0].$$

We zijn geïnteresseerd in de oneigenlijke Riemann-integraal $I_n := \mathcal{R}\text{-}\int_0^\infty f_n(x) \, dx$, eerst voor $n \rightarrow \infty$ en dan voor vaste n .

- (i). Laat zien dat $I_n < \infty$ voor alle n , en bewijs met behulp van de *monotone convergentiestelling* dat $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

Neem $n \in \mathbb{N}$ vast, en beschouw de (hulp-) functie $g : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ met

$$g(x, y) := y f_n(y) f_n(xy) \quad \left[(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \right].$$

We zullen I_n bepalen door g met behulp van ‘Fubini’ te integreren naar een voor de hand liggende maat μ op een voor de hand liggende σ -algebra $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}_+^2$.

- (ii). Geef deze $\mathcal{A}$ en μ . Waarom is nu aan alle voorwaarden van ‘Fubini; niet-negatief’ voldaan?
- (iii). Laat nu zien dat $\int_{\mathbb{R}_+^2} g \, d\mu = I_n^2$ en $\int_{\mathbb{R}_+^2} g \, d\mu = \frac{1}{4}\pi/n$, en bepaal I_n .

○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○

NORMERING:	1 (i): 2	2 (i): 2	3 (i): 2	4 (i): 3	TOTAAL:
	(ii): 2	(ii): 1	(ii): 2	(ii): 1	38 punten!
	(iii): 2	(iii): 3	(iii): 2	(iii): 4	
	(iv): 1	(iv): 3	(iv): 3		EINDCIJFER:
	(v): 2		(v): 1		$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$
	(vi): <u>2</u>	<u> </u>	<u> </u>	<u> </u>	
	11	9	10	8	

○●★☆・★*●○・○●★☆・★*●○・○●★☆・★*●○・○●★☆・★*●○・○●★☆・★*●○・○●★☆・★*●○