

Opgave 1. Zij $\mathcal{R}$ een *ring* van delen van een verzameling V , en zij μ een $\overline{\mathbb{R}}_+$ -waardige functie op $\mathcal{R}$ met $\mu(\emptyset) = 0$.

- Veronderstel verder dat μ een *premaat* is op $\mathcal{R}$, en zij μ^* de uitwendige maat bij μ en $\mathcal{R}$.

- Beschouw het speciale geval met $V = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}$ de ring voortgebracht door de cellen in $\mathbb{R}$, en $\mu = m$ met m de Lebesgue-premaat op $\mathcal{R}$. Zoals bekend, is er een $E \subset \mathbb{R}$ te vinden die *niet Lebesgue-meetbaar* is.

- Opgave 2.** Beschouw voor een rij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ van meetbare $\mathbb{R}$ -waardige functies op een maatruimte $(V, \mathcal{A}, \mu)$ de volgende bewering:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_V f_n \, d\mu = \int_V f \, d\mu. \quad (*)$$

- We willen laten zien dat in Stelling A de voorwaarde van integreerbaarheid van f_1 niet gemist kan worden.

- Zoz

Opgave 3. Zij $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door $F(x) := \arctan x$, en zij m_F de door F geïnduceerde Stieltjes-premaat op de halfring der cellen in $\mathbb{R}$.

- (i). Waarom is m_F voortzetbaar tot een *maat* (weer aangegeven met m_F) op de σ -algebra $\mathcal{B}or(\mathbb{R})$? Waarom is deze voortzetting uniek? Laat zien dat $m_F(\{x\}) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.
- (ii). Waarom is m_F *absoluut-continu* (t.o.v. de Borel-maat m)? Geef een dichtheid g van m_F , en bewijs de bekende eigenschap dat $m_F(B) = 0$ voor alle $B \in \mathcal{B}or(\mathbb{R})$ met $m(B) = 0$.
- (iii). Bepaal $\int_{[0,1]} x m_F(dx)$.
- (iv). Bepaal $\int_{\mathbb{R}_+} x \cdot 1_{\mathbb{Q}}(x) m_F(dx)$.
- (v). Bepaal $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}_+} \{1 + (-1/(1+x))^n\} m_F(dx)$.

Opgave 4. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte, en zij $g : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ een meetbare functie.

- (i). Geef een bewijs (in drie stappen) van de *substitutie-regel* voor een *niet-negatieve* meetbare functie f op $\mathbb{R}_+$:

$$\int_V f \circ g \, d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} f \, d\mu_g,$$

waarbij μ_g de *beeldmaat* is van μ onder g .

- (ii). Geef kort aan waarom de verzameling $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x > y\}$ een Borel-meetbaar deel is van $\mathbb{R}_+^2$, en laat zien, met m de Borel-maat voor $\mathbb{R}_+$, dat

$$\int_{\mathbb{R}_+} 1_C(x, y) m(dy) = x \quad [x \geq 0].$$

- (iii). Neem voor f in (i) de identiteit, dus $f(x) = x$ voor $x \in \mathbb{R}_+$. Laat dan met behulp van (ii) zien dat onder een (zelf te bedenken) additionele voorwaarde t.a.v. μ en g het volgende geldt:

$$\int_V g \, d\mu = \int_0^\infty \mu(\{g > y\}) \, m(dy).$$

- (iv). Geef maten μ_1 en μ_2 en een verzameling D zó dat (ook) $\int_V g \, d\mu = (\mu_1 \otimes \mu_2)(D)$.

○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○

NORMERING:	1 (i): 2	2 (i): 2	3 (i): 2	4 (i): 3	TOTAAL:
	(ii): 2	(ii): 3	(ii): 2	(ii): 2	38 punten!
	(iii): 2	(iii): 3	(iii): 2	(iii): 3	
	(iv): 2	(iv): 1	(iv): 2	(iv): 1	EINDCIJFER:
	(v): $\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	(v): $\frac{3}{11}$	$\frac{1}{9}$	$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$

○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○・○●✱✱・✱✱●○