

Voortentamen Maat- en Integratietheorie

[illegible]

Opgave 1. Zij $\mathcal{H}$ een halfring in V . Laat $\mathcal{R}_1$ de collectie zijn van alle eindige, disjuncte verenigingen van verzamelingen uit $\mathcal{H}$, en $\mathcal{R}_2$ die van alle eindige verenigingen van verzamelingen uit $\mathcal{H}$.

- (i). Bewijs de bekende eigenschap dat $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$. (2)
- (ii). $\mathcal{R}_1$ is een *ring*, en wel een heel speciale. In welk opzicht? (1)

Opgave 2. Geef in een verzameling V met $\#(V) \geq 2$ een voorbeeld van een *algebra* $\mathcal{A}$ bestaande uit *vier* verzamelingen. (1)

Opgave 3. Laat W opgesplitst zijn in twee niet-triviale delen U en V , en veronderstel dat $\mathcal{A}$ een σ -algebra is in U en $\mathcal{D}$ één in V . Neem nu als σ -algebra in W de collectie $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{A} \sqcup \mathcal{D})$. Bewijs dat $\mathcal{B} = \{A \cup D : A \in \mathcal{A} \text{ en } D \in \mathcal{D}\}$. (3)

Opgave 4. Laat slechts met behulp van de *definitie* van $\mathcal{Bor}(\mathbb{R})$ zien dat de verzameling der irrationale getallen een Borel-verzameling is. (2)

Opgave 5. Formuleer expliciet en bewijs de bekende eigenschap dat $\mathcal{Bor}(\mathbb{R})$ gesloten is onder *translaties*. (2)

Opgave 6. Formuleer expliciet en bewijs de bekende eigenschap dat een eindig-additieve functie μ op een *ring* $\mathcal{R}$ in V monotoon is. (2)

Opgave 7. Zij $\{r_1, r_2, \dots\}$ een aftelling van $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$, en definieer voor $\varepsilon > 0$ de verzameling B_ε door $B_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{\infty} (r_i - \varepsilon(\frac{1}{2})^i, r_i]$. Dan is natuurlijk $(0, 1] \cap \mathbb{Q} \subset B_\varepsilon$ voor alle ε , en elke B_ε bevat ook heel veel irrationale getallen. Ga nu, met behulp van de Lebesgue-premaat, na of ook $(0, 1] \subset B_\varepsilon$ voor $\varepsilon < 1$. En voor $\varepsilon = 1$? (3)

Opgave 8. Zij $\mathcal{H}$ een halfring in V en μ een premaat op $\mathcal{H}$. Geef de definitie van de *uitwendige maat* μ^* bij μ en $\mathcal{H}$, en bewijs de bekende eigenschap dat μ^* een *voortzetting* is van μ . (2)

Opgave 9. Zij μ^* de uitwendige maat bij een premaat μ op een halfring $\mathcal{H}$ in V . Bewijs de bekende eigenschap dat elke $E \subset V$ met $\mu^*(E) = 0$ μ^* -meetbaar is. (2)

Opgave 10. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Veronderstel dat $E \subset V$ ‘zwak gemengd’ wordt door verzamelingen uit $\mathcal{A}$ in de zin dat

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset E \subset B \text{ en } \mu(B \setminus A) < \varepsilon.$$

Laat zien dat E dan ook ‘sterk gemengd’ wordt in de zin dat

$$\exists A, B \in \mathcal{A} : A \subset E \subset B \text{ en } \mu(B \setminus A) = 0. \quad (2)$$

○●★•★*●○•○●*★•★*●○•○●*★•★*●○•○●*★•★*●○•○●*★•★*●○•○●*★•★*●○