

Tentamen Maat- en Integratietheorie

[illegible]

Opgave 1. Beschouw de volgende collectie van deelverzamelingen van $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{H} := \{(n, n+1] : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\emptyset\}.$$

Zij $\mathcal{A}$ de door $\mathcal{H}$ voortgebrachte σ -algebra in $\mathbb{R}$.

- (i). Laat zien dat $\mathcal{H}$ een halfring is, en geef aan [antwoord volstaat] hoe de verzamelingen uit de σ -algebra $\mathcal{A}$ er uit zien.

Definieer op $\mathcal{H}$ de functie μ door

$$\mu((n, n+1]) := 1 \text{ voor } n \in \mathbb{Z}, \text{ en } \mu(\emptyset) := 0.$$

- (ii). Laat zien dat μ een premaat is op $\mathcal{H}$, en geef aan [antwoord volstaat] hoe de (unieke) voortzetting van μ tot een maat op $\mathcal{A}$ er uit ziet.

Zij μ^* de uitwendige maat bij μ en $\mathcal{H}$.

- (iii). Bepaal alle $E \subset \mathbb{R}$ met $\mu^*(E) = 0$, en alle $E \subset \mathbb{R}$ met $\mu^*(E) = 1$, en geef aan [antwoord volstaat] wat $\mu^*(E)$ is voor een willekeurig deel E van $\mathbb{R}$.
- (iv). Neem een vaste A in $\mathcal{H}$ met $A \neq \emptyset$. Laat zien dat dan voor $E \subset \mathbb{R}$:

$$\mu(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \iff E \supset A \text{ of } E \subset A^c.$$

- (v). Bepaal met behulp van (iv) de σ -algebra $\mathcal{H}_\mu$ der μ^* -meetbare verzamelingen E in $\mathbb{R}$. Wat valt op als we $\mathcal{H}_\mu$ vergelijken met de σ -algebra $\mathcal{A}$ in (i)?

Opgave 2. Beschouw de maatruimte $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ met $\mathcal{B}$ de Borel- σ -algebra in $\mathbb{R}$ en m de Lebesgue-maat op $\mathcal{B}$. Definieer de functie μ op $\mathcal{B}$ door

$$\mu(B) := \int_B f \, dm \text{ voor } B \in \mathcal{B}, \text{ met } f(x) := \begin{cases} 1 & , \text{ als } x < 0, \\ 2x & , \text{ als } x \geq 0. \end{cases}$$

- (i). Bewijs de bekende eigenschap dat μ een *maat* is op $\mathcal{B}$. Hoe wordt een maat zoals μ wel genoemd? En hoe heet f dan?
- (ii). Bedenk een stijgende, rechts-continue functie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zó dat μ gelijk is aan de door F geïnduceerde Stieltjes-maat m_F waarvoor, zoals bekend: $m_F((a, b]) = F(b) - F(a)$ voor alle $a < b$. [Vergeet $\mu = m_F$ niet te *bewijzen*.]
- (iii). Bepaal $\int_{\mathbb{R}} g \, d\mu$ met $g(x) := x$ als $|x| \leq 1$, en $:= 0$ elders.
- (iv). Bepaal $\int_{\mathbb{R}} h \, d\mu$ met $h(x) := 1$ als $x \in \mathbb{Q}^c \cap [0, 1]$, en $:= 0$ elders.

Z0Z

[illegible]