



Laat  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven zijn door

$$F(x) = (1 - e^{-x}) 1_{\mathbb{R}_+}(x) \quad [x \in \mathbb{R}],$$

en zij  $m_F$  de door  $F$  geïnduceerde Stieltjes-maat op de Borel- $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}or(\mathbb{R})$ .

(iii). Laat (kort) met de éénduidigheidsstelling voor maatuitbreiding zien dat  $m_F$  absoluut-continu is (ten opzichte van de Borel-maat  $m$ ); met welke dichtheid?

Laat, voor  $n \in \mathbb{N}$ , de functie  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven zijn door

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n 1_{[0,n]}(x) \quad [x \in \mathbb{R}].$$

(iv). Geef (kort) aan waarom  $f_n$  Borel-meetbaar is, en laat zien dat  $f_n \rightarrow f$  punts-  
gewijs op  $\mathbb{R}$  als  $n \rightarrow \infty$  voor zekere meetbare functie  $f$ . Waarom convergeert  
( $f_n$ ) nu ook in  $m_F$ -maat naar  $f$ , en wat betekent dit?

(v). Toon aan dat de limiet voor  $n \rightarrow \infty$  van  $\int_{\mathbb{R}} f_n \, dm_F$  bestaat, en bepaal de waarde van deze limiet.

**Opgave 4.** Beschouw  $\mathbb{R}^2$  voorzien van de Borel- $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^2)$  en de Borel-maat  $m_2$ , en laat  $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ .

(i). Geef kort, zonder bewijzen, aan waarom bij integratie naar  $m_2$  van  $\mathbb{R}$ -waardige, Borel-meetbare functies op  $\mathbb{R}^2$  de stellingen van Fubini gebruikt kunnen worden.

(ii). Laat zien dat  $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}^2)$ ; doe dit op twee manieren: met de definitie van  $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^2)$ , en door slechts gebruik te maken van het feit dat  $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^2)$  de  $\sigma$ -algebra is voortgebracht door de cellen in  $\mathbb{R}^2$ .

Laat de functie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gedefinieerd zijn door

$$f(x, y) := y e^{-(1+|x|+x^2)y^2} \quad \left[ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right].$$

(iii). Bewijs dat  $|f|$  integreerbaar is over  $A$ .

(iv). Waarom is ook  $f$  integreerbaar over  $A$ ? Bepaal  $\int_A f \, dm_2$ .

[illegible]

|            |                 |                 |                 |                 |                                         |
|------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------------------------------|
| NORMERING: | <b>1</b> (i): 3 | <b>2</b> (i): 2 | <b>3</b> (i): 1 | <b>4</b> (i): 1 | TOTAAL:                                 |
|            | (ii): 2         | (ii): 2         | (ii): 2         | (ii): <b>2</b>  | 38 punten!                              |
|            | (iii): 2        | (iii): 2        | (iii): 2        | (iii): <b>3</b> |                                         |
|            | (iv): 2         | (iv): 2         | (iv): 2         | (iv): 2         | EINDCIJFER:                             |
|            | (v): 3          | (v): 3          |                 |                 | $1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$ |
|            | <hr/> 9         | <hr/> 11        | <hr/> 10        | <hr/> 8         |                                         |

[illegible]