Divisie Wiskunde en Informatica (FEW)
Vrije Universiteit Amsterdam 28 april 2000

Tentamen **Maat- en Integratietheorie**

○●⋆⋆·⋆⋆●○·○●⋆⋆·⋆⋆●○·○●⋆⋆·⋆⋆●○·○●⋆⋆·⋆⋆●○·○●⋆⋆·⋆⋆●○·○●⋆⋆·⋆⋆●○·○●⋆⋆·⋆⋆●○

Opgave 1. Laat μ en ν twee maten zijn op de σ-algebra $\mathcal{A}$ van een meetbare ruimte $(V, \mathcal{A})$. Beschouw de *som* $\mu + \nu$ gedefinieerd door

$$(\mu + \nu)(A) := \mu(A) + \nu(A) \qquad [A \in \mathcal{A}].$$

(i). Laat zien dat $\mu + \nu$ eveneens een maat op $\mathcal{A}$ voorstelt.

(ii). Geef kort de stappen aan [geen precieze bewijzen] waarmee men de volgende voor de hand liggende eigenschap zou kunnen bewijzen: Als een reële functie f op V integreerbaar is naar μ en naar ν, dan ook naar $\mu + \nu$, en er geldt:

$$\int_V f \, \mathrm{d}(\mu + \nu) = \int_V f \, \mathrm{d}\mu + \int_V f \, \mathrm{d}\nu.$$

Zij F en G twee reële, stijgende, rechts-continue functies op $\mathbb{R}$ met bijbehorende Stieltjes-maten m_F en m_G op $\mathcal{B}or(\mathbb{R})$. Aangezien de (puntsgewijze) som $F + G$ ook stijgend en rechts-continu is, induceert deze eveneens een Stieltjes-maat m_{F+G}.

(iii). Bewijs met behulp van de éénduidigheidsstelling voor (uitbreiding van) maten:

$$m_{F+G} = m_F + m_G.$$

Definieer $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ door

$$\phi(x) := \sin x \quad \text{en} \quad H(x) := \begin{cases} -\frac{1}{2}\pi - 1 & \text{, als } x < -\frac{1}{2}\pi, \\ x + \sin x & \text{, als } -\frac{1}{2}\pi \leq x < \frac{1}{2}\pi, \\ 3 & \text{, als } x \geq \frac{1}{2}\pi. \end{cases}$$

(iv). Bepaal $\int_{\mathbb{R}} \phi \, \mathrm{d}m_H$ met behulp van (iii) en (ii).

Opgave 2. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een *eindige* maatruimte: $\mu(V) < \infty$, en laat f_n (met $n \in \mathbb{N}$), f en g reële, meetbare functies zijn op V.

(i). Wat betekent het dat $f_n \xrightarrow{\mu} f$ als $n \to \infty$, d.w.z. dat f_n *in maat* naar f convergeert als $n \to \infty$?

(ii). Toon aan dat

$$\lim_{k \to \infty} \mu\Big(\big\{|g| > k\big\}\Big) = 0.$$

(iii). Laat zien dat de volgende implicatie van toepassing is:

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \implies f_n g \xrightarrow{\mu} f g.$$

Aanwijzing: Gebruik voor $k \in \mathbb{N}$ de partitie $V = \big\{|g| \leq k\big\} \cup \big\{|g| > k\big\}$.

ZOZ

Opgave 3. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte, en laat $f_1, f_2, \ldots$ meetbare, niet-negatieve, reële functies zijn op V.

(i). Formuleer (de overal-versie van) het Lemma van Fatou voor de rij (f_n) en bewijs dit lemma; hierbij mag u zonder bewijs gebruik maken van de monotone convergentiestelling.

(ii). Formuleer (de overal-versie van) de gedomineerde convergentiestelling voor de rij (f_n).

Veronderstel voorts dat de maat μ niet-triviaal is: $\mu(V) > 0$, en laat f een meetbare, niet-negatieve, reële functie zijn op V met integraal $c := \int_V f \, \mathrm{d}\mu$.

(iii). Toon aan:

$$\lim_{n\to\infty} \int_V n \arctan(f/n) \, \mathrm{d}\mu = c.$$

Aanwijzing: maak onderscheid tussen de gevallen $c < \infty$ en $c = \infty$.

Opgave 4. We zijn geïnteresseerd in de waarde van de oneigenlijke Riemann-integraal

$$J := \mathcal{R}\text{-}\int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} \exp\left[-(1+y^2)\right] \mathrm{d}y.$$

Daartoe voeren we de volgende functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in:

$$f(x,y) := x \exp\left[-(1+x^2)(1+y^2)\right] \qquad \left[(x,y) \in \mathbb{R}^2\right].$$

Zij m_2 de Borel-maat voor $\mathbb{R}^2$.

(i). Laat met behulp van een stelling van Fubini zien dat

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} f \, \mathrm{d}m_2 = \tfrac{1}{2} J.$$

Noteer voor $a \geq 0$: $I_a := \mathcal{R}\text{-}\int_a^\infty \exp\left[-t^2\right] \mathrm{d}t$.

(ii). Laat met behulp van een stelling van Fubini zien dat ook

$$\int_{\mathbb{R}^2_+} f \, \mathrm{d}m_2 = I_0 I_1.$$

(iii). Laat tenslotte met behulp van het bekende feit dat $I_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, zien dat J uitgedrukt kan worden in slechts een *niet*-oneigenlijke Riemann-integraal.

○●✶★·★✶●○·○●✶★·★✶●○·○●✶★·★✶●○·○●✶★·★✶●○·○●✶★·★✶●○·○●✶★·★✶●○

NORMERING:	**1** (i): 1	**2** (i): 1	**3** (i): 3	**4** (i): 3	TOTAAL:
	(ii): 2	(ii): 2	(ii): 1	(ii): 5	36 punten.
	(iii): 3	(iii): 5	(iii): 5	(iii): 1	
	(iv): 4				EINDCIJFER:
	10	8	9	9	$1 + \frac{1}{4}\times$ totaal.

○●✶★·★✶●○·○●✶★·★✶●○·○●✶★·★✶●○·○●✶★·★✶●○·○●✶★·★✶●○·○●✶★·★✶●○