

Tentamen Maat- en Integratietheorie

○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○・○●✱★・✱✱●○

Opgave 1. Zij $\mathcal{R}$ een *ring* van deelverzamelingen van een niet-lege verzameling V , en zij μ een premaat op $\mathcal{R}$.

(i). Laat zien dat

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F) \quad [E, F \in \mathcal{R}].$$

Zij μ^* de uitwendige maat bij μ en $\mathcal{R}$.

(ii). Hoe is μ^* gedefinieerd, en wat betekent het dat μ^* *monotoon* en *aftelbaar subadditief* is?

(iii). Geef een bewijs van de bekende eigenschap dat

$$\mu^*(E) = \mu(E) \quad [E \in \mathcal{R}].$$

We herinneren eraan dat een verzameling $E \subset V$ μ^* -meetbaar genoemd wordt indien

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad [A \subset V]. \quad (*)$$

(iv). Laat, door geschikte keuzen van A in $(*)$, zien dat voor een μ^* -meetbare verzameling E :

$$\mu^*(E) + \mu^*(F) = \mu^*(E \cup F) + \mu^*(E \cap F),$$

voor *alle* $F \subset V$.

Opgave 2. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte.

(i). Formuleer voor een rij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ van $\mathbb{R}$ -waardige functies op V (de overal-versie van) de *monotone convergentiestelling*.

Zij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een *dalende* rij van niet-negatieve, reële, meetbare functies op V , noteer $f := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$, en veronderstel dat f_1 *integreerbaar* is.

(ii). Laat met behulp van (i) zien dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_V f_n \, d\mu = \int_V f \, d\mu. \quad (*)$$

(iii). Laat aan de hand van een eenvoudig voorbeeld zien dat voor (*) de voorwaarde van integreerbaarheid van f_1 niet kan worden gemist.

(iv). Met een beroep op welke stelling had (*) ook kunnen worden aangetoond?

ZOZ

Opgave 3. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte.

(i). Bewijs dat voor een meetbare, niet-negatieve functie ϕ op V :

$$\mu(\{\phi \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_V \phi d\mu \quad [\varepsilon > 0].$$

Aanwijzing: beschouw $\int_V \phi d\mu$ en splits het integratiegebied V met behulp van ϕ in twee stukken.

Laat $f, f_1, f_2, \dots$ meetbare, reële functies zijn op V .

(ii). Wat betekent het dat $f_n \xrightarrow{\mu} f$, d.w.z. dat f_n in maat naar f convergeert?

(iii). Bewijs met behulp van (i) de volgende implicatie:

$$\int_V |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \implies f_n \xrightarrow{\mu} f,$$

en laat zien dat de omgekeerde implicatie niet voor alle maatruimten waar is.

Een functie $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heet *Lipschitz-continu* indien er een $M \geq 0$ is zodat

$$|g(x) - g(y)| \leq M |x - y| \quad [x, y \in \mathbb{R}].$$

(iv). Zij $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-continu. Bewijs dan de volgende implicatie:

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \implies g \circ f_n \xrightarrow{\mu} g \circ f.$$

Opgave 4. We zijn geïnteresseerd in convergentie en bepaling van de oneigenlijke Riemann-integraal

$$I := \mathcal{R}\text{-}\int_0^\infty f(x) dx, \quad \text{met } f(x) := \frac{\sin x}{x} \text{ als } x > 0, \text{ en } := 1 \text{ als } x = 0.$$

Definieer de (hulp-) functie g door $g(x) := \frac{\sin^2 x}{x^2}$ als $x > 0$, en $:= 1$ als $x = 0$.

(i). Laat zien dat I bestaat en gelijk is aan $\mathcal{R}\text{-}\int_0^\infty g(x) dx$. Aanwijzing: Beschouw $\mathcal{R}\text{-}\int_\varepsilon^c g(x) dx$ voor $c > \varepsilon > 0$, en pas partiële integratie toe.

(ii). Bewijs: g is Lebesgue-integreerbaar over $\mathbb{R}_+$.

(iii). Laat zien dat (met m de Borel-maat op $\mathbb{R}$)

$$\int_{\mathbb{R}_+} y e^{-xy} m(dy) = \frac{1}{x^2} \quad [x > 0].$$

(iv). Laat zien dat

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-xy} \sin^2 x m(dx) = \frac{2}{y(4+y^2)} \quad [y > 0].$$

(v). Bewijs tenslotte met behulp van (i) t/m (iv) en van 'Fubini' dat $I = \frac{1}{2}\pi$.

○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○

NORMERING:	1 (i): 2	2 (i): 1	3 (i): 2	4 (i): 2	TOTAAL:
	(ii): 2	(ii): 2	(ii): 1	(ii): 1	36 punten.
	(iii): 2	(iii): 3	(iii): 2	(iii): 2	
	(iv): 3	(iv): 2	(iv): 3	(iv): 3	EINDCIJFER:
			(v): 3		$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal}$
	<u>9</u>	<u>8</u>	<u>8</u>	<u>11</u>	

○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ● ○