

○●*★・★★●○・○●*★・★★●○・○●*★・★★●○・○●*★・★★●○・○●*★・★★●○・○●*★・★★●○・○●*★・★★●○・○●*★・★★●○

(i). Bewijs de bekende eigenschap dat m *atoomvrij* is, dus dat $m(\{x\}) = 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.

(ii). Laat met behulp van (i) zien dat voor een cel $A = (a, b]$ in $\mathbb{R}$ geldt:

(iii). Geef een precieze formulering van de *éénduidigheidsstelling* voor maten op een σ -algebra $\sigma(\mathcal{H})$ voortgebracht door een halfring $\mathcal{H}$ in een verzameling V .

$$m(-A) = m(A) \quad \text{voor alle } A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}).$$

(i). Wat betekent het dat $f_n \xrightarrow{\mu} f$, d.w.z. dat (f_n) in maat naar f convergeert?

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \implies f_n^2 \xrightarrow{\mu} f^2, \quad (*)$$
$$f_n^2 - f^2 = (f_n - f)^2 + 2(f_n f - f^2).$$
$$\mu\left(\{|f_n f - f^2| \geq \varepsilon\}\right) \leq \mu\left(\{|f_n - f| \geq \varepsilon/k\}\right) + \mu\left(\{|f| > k\}\right);$$

(iii). Geef een eenvoudige voorwaarde in termen van alleen μ en één in termen van alleen f waaronder we met behulp van (ii) kunnen concluderen dat de volgende implicatie geldt:

(iv). Laat (tenminste) één der in (iii) gegeven voorwaarden vervuld zijn. Laat met behulp van (iii) en van de boven gegeven decompositie van $f_n^2 - f^2$ zien dat dan eigenschap (*) inderdaad geldt.

ZOZ

Opgave 3. Laat voor $n \geq 2$ de functie $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ gedefinieerd zijn door

$$f_n(x) := \frac{x}{(1 - x/n)^n} \quad [0 \leq x \leq 1].$$

We zijn geïnteresseerd in de Riemann-integraal $I_n := \mathcal{R}\text{-}\int_0^1 f_n(x) dx$ voor $n \rightarrow \infty$.

- (i). Bewijs: f_n is integreerbaar m.b.t. de Borel-maat m op de σ -algebra $\mathcal{Bor}([0, 1])$ met $\int f_n dm = I_n$.
- (ii). Wat kunnen we met (alleen) het Lemma van Fatou zeggen over I_n voor $n \rightarrow \infty$?
- (iii). Formuleer de Gedomineerde Convergentiestelling voor de rij (f_n) , laat met behulp daarvan zien dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \int_{[0,1]} x e^x dx,$$

en bepaal de waarde van deze limiet.

- (iv). Laat zien dat en hoe door ontwikkeling van e^x in (iii) in een machtreeks de som bepaald kan worden van de volgende reeks:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+2} \frac{1}{n!}.$$

Opgave 4. Laat de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd zijn door

$$f(x, y) := xy^2 e^{-(1+x^2)y^2} \quad [(x, y) \in \mathbb{R}^2].$$

- (i). Waarom is f Borel-meetbaar en is $\mathbb{R}_+^2$ een Borel-verzameling in $\mathbb{R}^2$?
- (ii). Geef een precieze formulering van de stelling van Fubini voor niet-negatieve functies.
- (iii). Bepaal de integraal

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} f \, dm_2,$$

als m_2 de Borel-maat op $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^2)$ voorstelt. Men mag hierbij gebruik maken van het bekende feit dat $\mathcal{R}\text{-}\int_0^\infty e^{-u} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○

NORMERING:	1 (i): 2	2 (i): 1	3 (i): 1	4 (i): 2	TOTAAL:
	(ii): 2	(ii): 3	(ii): 3	(ii): 1	36 punten.
	(iii): 1	(iii): 4	(iii): 4	(iii): 4	
	(iv): <u>3</u>	(iv): <u>3</u>	(iv): <u>2</u>	<u> </u>	EINDCIJFER:
	8	11	10	7	$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$

○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○