

[illegible]

(i). Voor welke verzamelingen E is $\mu^*(E)$ gedefinieerd? Hoe luidt deze definitie? Bewijs nu de bekende eigenschap dat $\mu^*(E) = \mu(E)$ voor alle $E \in \mathcal{H}$.

Laat $\mathcal{A}$ de door $\mathcal{H}$ voortgebrachte σ -algebra zijn. Neem $E \subset V$ met $\mu^*(E) < \infty$.

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$
$$\mu^*(B) = \mu^*(E).$$

Opgave 2. We zijn geïnteresseerd in de oneigenlijke Riemann-integraal

$$I_n := \mathcal{R}\text{-}\int_0^n (1 - x/n)^n e^{x/2} dx$$

$$f_n(x) := (1 - x/n)^n 1_{[0,n]}(x) \quad [x \in \mathbb{R}_+],$$

(i). Laat zien dat het laatste inderdaad mogelijk is; geef $\mu(A)$ voor $A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}_+)$ expliciet weer in termen van de Borel-maat m , en beargumenteer kort de overgang van Riemann- naar Lebesgue-integraal.

(ii). Bepaal $\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x} \mu(dx)$, met μ de maat uit (i).

Opgave 3. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte en laat $f, f_1, f_2, \dots$ niet-negatieve functies zijn in de ruimte $\mathcal{L}^1(\mu)$ der μ -integreerbare, reële functies op V .

$$f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-b.o.} \implies \int_V |f_n - f| d\mu \rightarrow 0 \quad [n \rightarrow \infty].$$

(ii). Laat aan de hand van een voorbeeld zien dat de volgende bewering *niet* juist is:

$$\int_V f_n \, d\mu \rightarrow \int_V f \, d\mu \implies \int_V |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0 \quad [n \rightarrow \infty].$$

(iii). Formuleer de bijna-overal-versie van de gedomineerde convergentiestelling.

(iv). Laat met behulp van (iii) zien dat de volgende bewering *wel* juist is:

$$\left. \begin{array}{l} f_n \rightarrow f \text{ } \mu\text{-b.o.} \\ \int_V f_n \, d\mu \rightarrow \int_V f \, d\mu \end{array} \right\} \implies \int_V |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0 \quad [n \rightarrow \infty].$$

Aanwijzing: Schrijf $|f_n - f| = f_n \vee f - f_n \wedge f = (f_n + f) - 2(f_n \wedge f)$.

Opgave 4. Beschouw, bij vaste $t > 0$, de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gedefinieerd door

$$f(x, y) := \begin{cases} e^{-xy} \sin x & , \text{ als } (x, y) \in \mathbb{R}_+ \times [t, \infty), \\ 0 & , \text{ elders.} \end{cases}$$

Noteer met m en m_2 de Borel-maat op respectievelijk $\mathcal{B}or(\mathbb{R})$ en $\mathcal{B}or(\mathbb{R}^2)$.

(i). Laat zien dat f Borel-meetbaar is.

(ii). Bepaal de verzameling A_f van alle $x \in \mathbb{R}$ waarvoor $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) m(dy)$ bestaat, bepaal voor $x \in A_f$ met $x \geq 0$ de integraal $\int_{\mathbb{R}} |f(x, y)| m(dy)$, en laat hiermee zien dat f integreerbaar is naar m_2 .

(iii). Bepaal de verzameling B_f van alle $y \in \mathbb{R}$ waarvoor $\int_{\mathbb{R}} f(x, y) m(dx)$ bestaat, en laat zien dat voor $y \in B_f$ met $y \geq t$ geldt dat

$$\int_{\mathbb{R}} f(x, y) m(\mathrm{d}x) = \frac{1}{1 + y^2}.$$

(iv). Bewijs met behulp van het voorgaande:

$$\int_{(0,\infty)} e^{-xt} \frac{\sin x}{x} m(dx) = \frac{\pi}{2} - \arctan t.$$

(v). Geef aan waarom het bekende feit dat

$$\mathcal{R}\text{-}\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2},$$

niet op voor de hand liggende wijze uit (iv) kan worden afgeleid.

[illegible]

NORMERING:	1 (i): 2	2 (i): 3	3 (i): 2	4 (i): 1	TOTAAL:
	(ii): 1	(ii): 2	(ii): 3	(ii): 3	36 punten.
	(iii): 2	(iii): 3	(iii): 1	(iii): 3	
	(iv): 3		(iv): 3	(iv): 2	EINDCIJFER:
	(v): $\frac{1}{9}$			(v): $\frac{1}{10}$	$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$
	<u>9</u>	<u>8</u>	<u>9</u>	<u>10</u>	

○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○ • ○ ● * ★ • ★ * ● ○