

Opgave 3. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte met $\mu(V) > 0$, en zij $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een rij meetbare functies van V naar $\mathbb{R}$.

- (i). Wat verstaat men onder de functie $f := \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$? Laat met behulp van twee bekende karakteriseringen van meetbaarheid zien dat ook f meetbaar is.
- (ii). Formuleer en bewijs het *Lemma van Fatou* voor de rij (f_n) .
- (iii). Zij ϕ een positieve, meetbare functie van V naar $\mathbb{R}$. Laat dan zien dat voor $0 < \alpha < 1$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_V n \log \{1 + (\phi/n)^\alpha\} d\mu = \infty.$$

Opgave 4.

- (i). Formuleer de stelling van Fubini voor niet-negatieve functies, en geef kort (zonder bewijzen) aan waarom deze stelling gebruikt kan worden wanneer we een Borel-meetbare functie op $\mathbb{R}^2$ willen integreren naar de Borel-maat m_2 .

Zij $0 < a < b$. We zijn geïnteresseerd in de waarde van de Riemann-integraal I gedefinieerd door

$$I := \mathcal{R} \int_0^\infty (e^{-ay} - e^{-by}) \frac{1}{y} dy.$$

- (ii). Laat zien dat I alleen oneigenlijk is in ∞ (en bijvoorbeeld niet in 0) en dat I convergent is.

We willen I bepalen door gebruik te maken van (i), toegepast op de functie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ met

$$f(x, y) := \begin{cases} e^{-xy} & , \text{ als } (x, y) \in (a, b) \times \mathbb{R}_+, \\ 0 & , \text{ elders.} \end{cases}$$

- (iii). Waarom is f Borel-meetbaar?
- (iv). Bepaal I op de aangegeven wijze.

○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○

NORMERING:	1 (i): 2	2 (i): 1	3 (i): 2	4 (i): 2	TOTAAL:
	(ii): 4	(ii): 2	(ii): 3	(ii): 3	36 punten.
	(iii): 3	(iii): 3	(iii): 3	(iii): 1	
		(iv): 3		(iv) 4	EINDCIJFER:
	<u>9</u>	<u>9</u>	<u>8</u>	<u>10</u>	$1 + \frac{1}{4} \times \text{totaal.}$

○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○ ○ ● ★ ★ ★ ★ ● ○