


$$\mu(A) \leq \alpha m(A) \quad \text{voor alle } A \in \mathcal{H},$$

(i). Laat zien dat μ σ -eindig is op $\mathcal{H}$.

$$\mu(A) \leq \alpha m(A) \quad \text{voor alle } A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}).$$

(iii). Laat zien dat er een $\alpha \in \mathbb{R}_+$ is zó dat

$$m_F(A) \leq \alpha m(A) \text{ voor alle } A \in \mathcal{B}or(\mathbb{R}). \quad (*)$$

Opgave 2. Zij $(V, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte.

(i). Bewijs dat voor een meetbare, niet-negatieve functie ϕ op V :

$$\mu(\{\phi \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_Y \phi \, d\mu \quad [\varepsilon > 0].$$

Laat $f, f_1, f_2, \dots$ meetbare, reële functies zijn op V .

(ii). Wat betekent het dat $f_n \xrightarrow{\mu} f$, d.w.z. dat f_n *in maat* naar f convergeert?

(iii). Bewijs de bekende eigenschap dat de limiet-in-maat *uniek* is in de volgende zin: als ook g een meetbare, reële functie is op V , dan geldt

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \text{ en } f_n \xrightarrow{\mu} g \implies f = g \text{ } \mu\text{-b.o.}$$

(iv). Bewijs de volgende implicatie, gebruik makend van slechts de definitie zoals gegeven in (ii):

$$f_n \xrightarrow{\mu} f \implies |f_n| \xrightarrow{\mu} |f|.$$

(v). Bewijs met behulp van (i) de volgende implicatie:

$$\int_V |f_n - f| \, d\mu \rightarrow 0 \implies f_n \xrightarrow{\mu} f,$$

en laat zien dat de omgekeerde implicatie niet voor alle matruimten waar is.

$$I_n := \mathcal{R} \int_0^1 \frac{-\log x}{(1-x/n)^n} dx$$

○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○・○●*★・★*●○