



1. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke stochastische grootheden zijn met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{x^{\theta-1} e^{-x}}{\Gamma(\theta)}, \quad x > 0.$$

- Laat, op informele wijze, zien dat de Fisher informatie in 1 waarneming kan worden berekend als $I_\theta = -E_\theta \ell_\theta(X_1)$, waarin $\ell_\theta(x) = \log p_\theta(x)$;
 - Druk de Fisher informatie uit in de Gamma-functie Γ en zijn afgeleiden;
 - Bepaal een asymptotisch betrouwbaarheidsinterval voor θ gebaseerd op de meest aanneembare schatter. Licht uw antwoord toe met behulp van een stelling (die u op informele wijze mag citeren).
2. Laat $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ onderling onafhankelijke, identiek verdeelde stochastische vectoren zijn met verwachtingsvector (μ_1, μ_2) met $\mu_2 \neq 0$ en covariantiematrix $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$ voor een onbekende parameter $\rho \in (-1, 1)$.
- Bepaal de limietverdeling van $\sqrt{n}(\bar{X}_n/\bar{Y}_n - \mu_1/\mu_2)$;
 - Laat zien dat $n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n)$ een consistente schatter is voor $\rho = \text{cov}(X_1, Y_1)$;
 - Bepaal een asymptotisch betrouwbaarheidsinterval voor μ_1/μ_2 . Licht uw antwoord toe.
3. Veronderstel dat X_n multinomiaal verdeeld is met parameters n en $p = (p_1, \dots, p_k)$.
- Formuleer een stelling aangaande de limietverdeling van de rij $\sum_{i=1}^k (X_{ni} - np_i)^2 / (np_i)$ als $n \rightarrow \infty$.
 - Bewijs deze stelling.
4. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke, standaard normaal verdeelde stochastische grootheden zijn. (Dus is $EX_1^k = (k-1)(k-3) \cdots 3 \cdot 1$ voor alle even k .) We definiëren een "schatter" $\hat{\theta}_n$ als het punt waar de functie $\theta \mapsto \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^4$ minimaal is.
- Maak aannemelijk dat $\hat{\theta}_n$ in kans convergeert naar een punt θ_0 . Welk punt?
 - Welke limietverdeling verwacht u voor de rij $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$?
 - Als $\hat{\theta}_n$ wordt gebruikt om μ te schatten gebaseerd op een steekproef uit de $N(\mu, 1)$ -verdeling, wat is dan de relatieve efficiëntie van $\hat{\theta}_n$ en het steekproefgemiddelde $\bar{X}_n$?
5. Laat $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijk en identiek verdeeld met dichtheid f .
- Geef de formule voor een kernschatter $\hat{f}_n$ voor f .
 - Geef de definitie van de mean integrated square error (MISE) van $\hat{f}_n$.
6. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke stochastische grootheden zijn met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3, & \text{als } 0 < x < 1, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Laat $X_{n(1)}$ het minimum zijn van $X_1, \dots, X_n$. Bepaal rijen constanten a_n en b_n zodanig dat $a_n(X_{n(1)} - b_n)$ in verdeling convergeert naar een niet-ontaarde kansverdeling.

Normering:

1a: 4	2a: 5	3a: 4	4a: 4	5a: 3	6: 4
1b: 2	2b: 3	3b: 6	4b: 4	5b: 3	
1c: 4	2c: 4		4c: 4		

Eindcijfer = totaal/6+1