

1. Met behulp van de delta-methode kan men de limietverdeling van $\sqrt{n}(\phi(T_n) - \phi(\theta))$ afleiden uit de limietverdeling van $\sqrt{n}(T_n - \theta)$. Formuleer een precieze stelling en geef een bewijs.
2. Classificatie van een aselechte steekproef ter grootte 67 uit een populatie op 2 eigenschappen levert de volgende 2×2 -tabel:

5	7
25	30

Zij H_0 de hypothese dat de 2 eigenschappen onderling onafhankelijk zijn.

- a. Geef een numerieke uitdrukking voor de waarde van een toetsingsgrootheid voor een geschikte toets om H_0 te toetsen.
 - b. Geef een precieze omschrijving van het statistisch model dat aan deze toets ten grondslag ligt.
 - c. Hoe kan de bijbehorende kritieke waarde worden gevonden?
3. Veronderstel dat $(Y_1, X_1), \dots, (Y_n, X_n)$ onderling onafhankelijke stochastische vectoren zijn verdeeld volgens het niet-lineaire regressie model

$$Y_i = e^{-\theta_0 X_i} + e_i,$$

voor $\theta_0 \in (0, \infty)$ en onafhankelijke stochastische grootheden X_i en e_i met, respectievelijk, de homogene verdeling op $[0, 1]$ en een verdeling met $Ee_i = 0$ en $Ee_i^2 < \infty$. Laat $\hat{\theta}_n$ het punt van minimum van

$$\theta \mapsto \sum_{i=1}^n (Y_i - e^{-\theta X_i})^2, \quad \theta \in [0, \infty).$$

- a. Maak aannemelijk dat $\hat{\theta}_n$ in kans convergeert naar het punt θ_0 .
 - b. Welke limietverdeling verwacht u voor de rij $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$? (Integralen van het type $\int_0^1 x^a e^{-bx} dx$ hoeft u niet te evalueren.)
 - c. Veronderstel nu ook dat e_i standaard normaal verdeeld is. Bereken de Fisher informatie voor θ .
 - d. Breng de antwoorden op vragen b) en c) in verband en verklaar dit verband met een stelling uit het dictaat.
4. Gegeven onafhankelijke, Poisson verdeelde stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$ met $EX_i = \theta$ and $EY_i = \eta$ voor alle i willen we toetsen de nulhypothese $H_0: \theta = \eta$. Als toetsingsgrootheid kiezen we

$$T_n = \frac{(\bar{X}_n - \bar{Y}_n)^2}{\bar{X}_n + \bar{Y}_n}.$$

- a. Bepaal de limietverdeling van de rij stochastische grootheden nT_n als $n \rightarrow \infty$ onder H_0 .
 - b. Bepaal kritieke waarden c_n zodat $P_{\theta=\eta}(T_n \geq c_n) \rightarrow \alpha$ voor iedere $\theta = \eta$.
 - c. Laat zien dat $P_{\theta \neq \eta}(T_n \geq c_n) \rightarrow 1$ voor iedere $\theta \neq \eta$.
5. Laat $X_1, \dots, X_n$ onafhankelijk en identiek verdeeld met dichtheid f .
 - a. Geef de formule voor een kernschatter $\hat{f}_n$ voor f .
 - b. Geef de definitie van de mean integrated square error (MISE) van $\hat{f}_n$.

Normering:

1: 9	2a: 1	3a: 2	4a: 4	5: 4
	2b: 2	3b: 3	4b: 2	
	2c: 2	3c: 2	4c: 2	
		3d: 3		

Eindcijfer = totaal/4+1