

Licht uw antwoorden toe!

1. De stochastische grootheden X_n en Y_n zijn onafhankelijk en binomiaal verdeeld met parameters (n, p_1) en, respectievelijk, (n, p_2) . ($0 < p_1, p_2 < 1$.)
 - a. Bepaal constanten a_n en b_n zodanig dat de rij $a_n(X_n/Y_n - b_n)$ in verdeling convergeert naar een normale verdeling met positieve variantie. Welke verwachting en variantie?
 - b. Bepaal een asymptotisch betrouwbaarheidsinterval voor p_1/p_2 .
2. Laat $X_{(n)}$ het maximum van een steekproef $X_1, \dots, X_n$ van onafhankelijke stochastische grootheden met de kansdichtheid $f(x) = 2x1_{0 \leq x \leq 1}$.
 - a. Bewijs dat de rij $2n(1 - X_{(n)})$ in verdeling convergeert naar een standaard exponentiële verdeling.
 - b. Bepaal rijen constanten a_n en b_n zodanig dat de rij $a_n(X_{(n)} \log X_{(n)} - b_n)$ in verdeling convergeert naar een niet-gedegeneerde limietverdeling. Welke?
3. Veronderstel dat X_n multinomiaal verdeeld is met parameters n en $p = (p_1, \dots, p_k)$.
 - a. Formuleer een stelling aangaande de limietverdeling van de rij $\sum_{i=1}^k (X_{ni} - np_i)^2 / (np_i)$ als $n \rightarrow \infty$.
 - b. Bewijs deze stelling.
4. Laten $X_1, X_2, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke stochastische variabelen zijn, allemaal met dezelfde normale verdeling met onbekende verwachting θ_0 ("ware waarde") en variantie 1. (Het zesde moment van de standaard normale verdeling is 15.) Definieer, voor $\theta \in \mathbb{R}$, de functie

$$\psi_\theta(x) = (x - \theta)^3, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

We definiëren vervolgens de Z -schatter $\hat{\theta}_n$ als nulpunt van de functie

$$\Psi_n(\theta) = \mathbb{P}_n \psi_\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_\theta(X_i)$$

- a. Laat op basis van eigenschappen van de functie Ψ_n zien dat $\hat{\theta}_n$ als nulpunt van Ψ_n goed gedefinieerd is.
 - b. Bewijs dat de rij $\hat{\theta}_n$ in kans naar θ_0 convergeert.
 - c. Bepaal de asymptotische relatieve efficiëntie van $\hat{\theta}_n$ en het steekproefgemiddelde $\bar{X}_n$ als schatters voor θ_0 .
5.
 - a. Geef de formule voor een kernschatter.
 - b. Geef de definitie van de mean integrated square error (MISE) van een kernschatter.
 - c. Laat zien dat de MISE kan worden geschreven als een som van een "variantie" en een "bias" term.

Normering:

1a: 5	2a: 5	3a: 4	4a: 1	5a: 3
1b: 4	2b: 4	3b: 5	4b: 3	5b: 3
			4c: 5	5c: 3

Eindcijfer = totaal/5+1