

Licht uw antwoorden toe!

1. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en Poisson verdeeld met verwachting θ . We definiëren $T_n = -\log(n^{-1} \sum_{i=1}^n 1_{X_i=0})$.
 - a. Laat zien dat T_n een asymptotisch consistente schatter voor θ is.
 - b. Bepaal de asymptotische relatieve efficiëntie van T_n ten opzichte van $\bar{X}_n$ als schatters voor θ .
 - c. Welke schatter prefereert u op grond van het asymptotische gedrag van de twee schatters?
2. De stochastische grootheden $X_1, \dots, X_n$ zijn onderling onafhankelijk en identiek verdeeld volgens een kansverdeling die symmetrisch is rond zijn verwachtingswaarde en eindige vierde momenten bezit. Voor het toetsen van de nulhypothese $H_0: (EX_1, \text{var } X_1) = (0, 1)$ gebruiken we de toetsingsgrootheid

$$T_n = (\bar{X}_n)^2 + (\bar{X}_n^2 - 1)^2 / (\bar{X}_n^4 - 1).$$

- a. Bepaal de limietverdeling van de rij $(\sqrt{n}\bar{X}_n, \sqrt{n}(\bar{X}_n^2 - 1))$ onder de nulhypothese.
 - b. Bepaal "kritieke waarden" c_n zodanig dat de onbetrouwbaarheid $P_{H_0}(T_n \geq c_n)$ van de toets "Verwerp H_0 als $T_n \geq c_n$ " naar α convergeert. [Druk c_n uit in een kwantiel van een standaardverdeling.]
 - c. Beschouw de alternatieve hypothese $H_1: (EX_1, \text{var } X_1) = (1, 1)$. Laat zien $P_{H_1}(\sqrt{n}\bar{X}_n \geq x) \rightarrow 1$ en $P_{H_1}(\sqrt{n}(\bar{X}_n^2 - 1) \geq x) \rightarrow 1$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$.
 - d. Leid met behulp van c) af dat het onderscheidend vermogen $P_{H_1}(T_n \geq c_n)$ naar 1 convergeert. [Het volgt uit b) dat $c_n = O(1/n)$.]
3. Veronderstel dat X_n multinomiaal verdeeld is met parameters n en $p = (p_1, \dots, p_k)$.
 - a. Formuleer een stelling aangaande de limietverdeling van de rij $\sum_{i=1}^k (X_{ni} - np_i)^2 / (np_i)$ als $n \rightarrow \infty$.
 - b. Bewijs deze stelling.

4. Veronderstel dat $X_1, e_1, \dots, X_n, e_n$ onderling onafhankelijke stochastische grootheden zijn met e_i standaard normaal verdeeld voor iedere i en $X_1, \dots, X_n$ identiek verdeeld met $P(1 < X_i < 2) = 1$ voor iedere i . We nemen waar de vectoren $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ voor $Y_i = \theta_0 X_i + e_i$. Voor het schatten van de onbekende parameter $\theta \in \mathbb{R}$ (met “ware waarde” θ_0) gebruiken we het nulpunt $\hat{\theta}_n$ van de functie

$$\theta \mapsto \sum_{i=1}^n \psi(Y_i - \theta X_i),$$

waarin $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een vaste strict stijgende, begrensde en oneindig vaak differentieerbare functie is met $\psi(-x) = -\psi(x)$ voor iedere $x \in \mathbb{R}$ en $\psi(\infty) = 1$. [Bijvoorbeeld de logistieke functie $\psi(x) = 2/(1 + e^{-x}) - 1$.]

- Maak aannemelijk dat $\hat{\theta}_n$ in kans convergeert naar het punt θ_0 .
 - Welke limietverdeling verwacht u voor de rij $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$?
 - Geef een precies bewijs dat $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$, bijvoorbeeld door gebruik te maken van een stelling uit het dictaat.
- 5.
- Formuleer, op informele wijze, een stelling aangaande het asymptotisch gedrag van meest aannemelijke schatters.
 - Formuleer de stelling van Glivenko-Cantelli.

Normering:

1a: 3	2a: 3	3a: 3	4a: 2	5a: 5
1b: 5	2b: 3	3b: 6	4b: 4	5b: 4
1c: 1	2c: 1		4c: 3	
	2d: 2			

Eindcijfer = totaal/5+1