

De normering van de verschillende opgaven is niet uniform. Zie aan het einde van het tentamen.

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijk en standaard normaal verdeeld zijn. Bewijs dat $\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}_n|$ en $\bar{X}_n$ onderling onafhankelijk zijn.
2. Laat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke, standaard normaal verdeelde stochastische grootheden zijn. Voor een gegeven strikt stijgende, tweemaal differentieerbare functie $\psi: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ met $\psi(0) = 0$ en $\psi(x) \leq x$ definiëren we een schatter $\hat{\theta}_n$ als oplossing van de vergelijking

$$\sum_{i=1}^n \frac{|X_i|}{\theta} \psi\left(\frac{|X_i|}{\theta}\right) = n, \quad \theta \in (0, \infty).$$

- a. Maak aannemelijk dat $\hat{\theta}_n$ in kans convergeert naar een punt θ_0 . Karakteriseer dit punt als de oplossing van een vergelijking.
 - b. Welke limietverdeling verwacht u voor de rij $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$?
 - c. Wat zijn θ_0 en de asymptotische variantie in het geval dat $\psi(x) = x$?
 - d. Geef een precies bewijs dat $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$, bijvoorbeeld door gebruik te maken van een stelling uit het dictaat.
3. Met behulp van de delta-methode kan men de limietverdeling van $\sqrt{n}(\phi(T_n) - \phi(\theta))$ afleiden uit de limietverdeling van $\sqrt{n}(T_n - \theta)$. Formuleer een precieze stelling en geef een bewijs.
 4. Van een steekproef $X_1, \dots, X_n$ uit de Poisson verdeling met verwachting θ worden alleen geregistreerd:

$$S_n = \frac{1}{n} \#(i: X_i = 0), \quad T_n = \frac{1}{n} \#(i: X_i = 1).$$

- a. Toon aan dat zowel $\log(1/S_n)$ als T_n/S_n consistente schatters van θ zijn.
 - b. Bepaal de asymptotisch relatieve efficiëntie van deze schatters (als functie van de onbekende θ).
5. Formuleer zo precies en volledig mogelijk, maar ook zo kort mogelijk:
 - a. De stelling van Glivenko-Cantelli.
 - b. Een stelling aangaande de asymptotische verdeling van de Pearson statistiek voor het toetsen van onafhankelijkheid in een $k \times r$ -tabel.

Normering:

1a: 4	2a: 3	3a: 6	4a: 4	5a: 2
	2b: 5		4b: 4	5b: 3
	2c: 2			
	2d: 3			

Eindcijfer = totaal/4+1