

Tentamen Mathematische Statistiek

10 augustus 2000, 13:30 – 16:30

Divisie Wiskunde en Informatica, Faculteit der Exacte Wetenschappen, vrije Universiteit

1. a) Zij X_n een rij stochastische variabelen en $\mu \in \mathbb{R}$ zodanig dat $EX_n \rightarrow \mu$ en $\text{Var}(X_n) \rightarrow 0$ voor $n \rightarrow \infty$. Laat zien dat dan $X_n \xrightarrow{P} \mu$ voor $n \rightarrow \infty$.
- b) Geef een voorbeeld van een rij stochastische variabelen X_n zodat $X_n \xrightarrow{d} 0$ terwijl $EX_n = 1$ voor alle n . (Uiteraard wordt ook verwacht dat u laat zien dat uw voorbeeld deze eigenschappen heeft)
- c) Zij X_n een rij stochastische variabelen en X zodanig dat $X_n \xrightarrow{d} X$. Zij verder Y_n een rij stochastische variabelen zodanig dat X_n en Y_n stochastisch onafhankelijk zijn, en bovendien $Y_n \xrightarrow{d} Y$. De verdelingsfuncties van X en Y zijn continu. Laat rechtstreeks uit de definitie van convergentie in verdeling zien dat $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$, waar X en Y stochastisch onafhankelijk zijn.
- d) Zij $X, X_1, X_2, \dots$ een rij van stochastische variabelen met $X_n \xrightarrow{P} X$. Van de functie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is gegeven dat deze continu is. Bewijs (rechtstreeks uit definitie van convergentie in kans) dat $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$.
- e) In een dichtheidsschattingsprobleem kunnen we laten zien dat de MISE de van de schatter $\hat{f}_{n,h}$ de volgende vorm heeft:

$$MISE_f(\hat{f}_{n,h}) = I_f(n, h) + J_f(h)$$

De twee termen (zoals we weten zijn dit de variantie- en gekwadraterde biasterm) hebben het volgende asymptotische gedrag

$$nhI_f(n, h) \rightarrow c_1(f) > 0 \text{ en } h^{-6}J_f(h) \rightarrow c_2(f) > 0$$

voor $n \rightarrow \infty$, $h \downarrow 0$ en $nh \rightarrow \infty$. We kiezen nu $h = h_n = cn^{-\alpha}$ voor zekere $0 < \alpha < 1$. Bepaal welke keuze voor α 'asymptotisch MISE optimaal' is.

2. Zij $X_1, X_2, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen met (exponentiële) kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} 1_{[0, \infty)}(x)$$

De parameter θ is positief, maar verder onbekend. Gegeven is dat voor een exponentieel(θ) verdeelde stochastische variabele X geldt dat $EX = \theta$ en $\text{Var}X = \theta^2$.

We zijn geïnteresseerd in de kans dat een nieuwe trekking boven de 5 uitkomt, dus in de grootheid $P_\theta(X > 5) = e^{-5/\theta}$. Om deze grootheid te schatten, kunnen we gebruik maken van de volgende schatters:

$$T_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{(5, \infty)}(X_i) \text{ en } T_n^{(2)} = \exp(-5/\bar{X}_n)$$

- a) Laat zien dat beide schatters *consistent* zijn voor $P_\theta(X > 5)$.
- b) Laat zien dat

$$\sqrt{n}(T_n^{(1)} - e^{-5/\theta}) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, e^{-5/\theta} - e^{-10/\theta}) \text{ en } \sqrt{n}(T_n^{(2)} - e^{-5/\theta}) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 25\theta^{-2}e^{-10/\theta})$$

- c) Stel op basis van $T_n^{(2)}$ een asymptotisch betrouwbaarheidsinterval voor $e^{-5/\theta}$ op.

3. Zij $X_1, X_2, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke stochastische variabelen, allemaal met dezelfde verdeling met dichtheid

$$p_\mu(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|} \quad x \in \mathbb{R}$$

De verdeling is dus een verschoven Laplace-verdeling met onbekende, maar als vast te beschouwen, verschuiving μ . Definieer, voor $\theta \in \mathbb{R}$, de functie

$$\psi_\theta(x) = (x - \theta)^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

We definiëren vervolgens de Z -schatte $\hat{\theta}_n$ als nulpunt van de functie

$$\Psi_n(\theta) = P_n \psi_\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_\theta(X_i)$$

- a) Laat op basis van eigenschappen van de functie Ψ_n zien dat $\hat{\theta}_n$ als nulpunt van Ψ_n goed gedefinieerd is.

Gegeven is dat $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} dx = 4$.

- b) Bewijs dat $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \mu$.

Verder geldt dat $\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-|x|} dx = 1440$.

- c) Bewijs dat $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \mu) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 20)$.

4. Stel de functie $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is twee keer continu differentieerbaar in het punt θ , met $\phi'(\theta) = 0$ en $\phi''(\theta) > 0$. Verder hebben we de beschikking over een schatter T_n voor θ die asymptotisch standaard normaal verdeeld is:

$$\sqrt{n}(T_n - \theta) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

- a) Laat zien dat $\sqrt{n}(\phi(T_n) - \phi(\theta)) \xrightarrow{P} 0$.

- b) Laat zien dat

$$\frac{2n}{\phi''(\theta)} (\phi(T_n) - \phi(\theta)) \rightsquigarrow \chi_1^2$$

Normering:

1	a)	5	3	c)	10
	b)	5		a)	5
	c)	5		b)	10
	d)	5		c)	10
	e)	5		a)	5
2	a)	5	4	b)	10
	b)	10			

Het cijfer wordt als volgt berekend: $\frac{\text{aantal punten} + 10}{100}$.