

Tentamen Mathematische Statistiek

28 juni 2000, 13:30 – 16:30

Divisie Wiskunde en Informatica, Faculteit der Exacte Wetenschappen, vrije Universiteit

1. a) Geef een voorbeeld van een rij stochastische variabelen X_n zodat $X_n \rightsquigarrow 0$ maar $EX_n \rightarrow \infty$. (Uiteraard wordt ook verwacht dat u deze convergenties laat zien voor uw voorbeeld).
- b) Zij T_n een rij stochastische variabelen zodat $\sqrt{n}(T_n - 1) \rightsquigarrow X$ voor een stochastische variabele X met continue verdelingsfunctie F . Laat direct uit de definitie van $\rightsquigarrow$ en $\rightarrow^P$ zien dat $T_n \rightarrow^P 1$.
- c) Zij X, Y, X_n, Y_n stochastische variabelen. Laat rechtstreeks uit de definitie van convergentie in kans zien dat als $X_n \rightarrow^P X$ en $Y_n \rightarrow^P Y$, dit impliceert dat $(X_n, Y_n) \rightarrow^P (X, Y)$ voor de stochastische vectoren in $\mathbb{R}^2$.
- d) Zij $X_1, X_2, \dots$ een i.i.d. rij van stochastische variabelen met verwachting μ en eindig tweede moment. Zij verder

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ en } S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2$$

Laat zien dat

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

2. Zij $X_1, X_2, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke en identiek verdeelde stochastische variabelen met (Poisson) kansfunctie

$$p_\theta(k) = P_\theta(X_i = k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

De parameter θ is positief, maar verder onbekend. Gegeven is dat voor een $\text{Poisson}(\theta)$ verdeelde stochastische variabele X geldt dat $EX = \theta$ en $\text{Var}X = \theta$.

We beschouwen twee schatters voor $e^{-\theta}$:

$$T_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{0\}}(X_i) = \frac{\#\{i \leq n : X_i = 0\}}{n} \text{ en } T_n^{(2)} = \exp(-\bar{X}_n)$$

- a) Laat zien dat beide schatters *consistent* zijn voor $e^{-\theta}$.
- b) Laat zien dat

$$\sqrt{n}(T_n^{(1)} - e^{-\theta}) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, e^{-2\theta}(e^\theta - 1)) \quad \text{en} \quad \sqrt{n}(T_n^{(2)} - e^{-\theta}) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \theta e^{-2\theta})$$

- c) Geef de asymptotisch relatieve efficiëntie van $T_n^{(1)}$ en $T_n^{(2)}$.
 - d) Stel op basis van $T_n^{(2)}$ een asymptotisch betrouwbaarheidsinterval voor $e^{-\theta}$ op.
3. Zij $X_1, X_2, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke stochastische variabelen, allemaal met dezelfde normale verdeling met (onbekende, maar als vast te beschouwen) verwachting μ en variantie 1. Definieer, voor $\theta \in \mathbb{R}$, de functie

$$\psi_\theta(x) = (x - \theta)^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

We definiëren vervolgens de Z -schatte $\hat{\theta}_n$ als nulpunt van de functie

$$\Psi_n(\theta) = \mathbb{P}_n \psi_\theta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \psi_\theta(X_i)$$

- a) Laat op basis van eigenschappen van de functie Ψ_n zien dat $\hat{\theta}_n$ als nulpunt van Ψ_n goed gedefinieerd is.
- b) Bewijs dat $\hat{\theta}_n \rightarrow^P \mu$.

Gegeven is dat het zesde moment van de standaard normale verdeling 15 is.

- c) Bewijs dat $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \mu) \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 5/3)$.
4. Gegeven is een steekproef $X_1, X_2, \dots, X_n$ uit een verdeling met (onbekende) dichtheid f . Van f is bekend dat deze drie continue begrensde afgeleiden heeft. We kiezen de standaard normale dichtheid als kernfunctie K , en schatten f met behulp van de kernschatte

$$f_{n,h}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h}\right)$$

- a) Laat zien dat voor x vast geldt dat

$$\text{Var}(f_{n,h}(x)) = \frac{1}{nh} \int_{-\infty}^{\infty} K(z)^2 f(x - hz) dz - \frac{1}{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} K(z) f(x - hz) dz \right)^2$$

- b) Laat zien (gebruikmakend van de eigenschappen van f) dat voor $n \rightarrow \infty$, $h \downarrow 0$ zodat $nh \rightarrow \infty$ geldt dat

$$nh \text{Var}(f_{n,h}(x)) \rightarrow f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(z)^2 dz$$

Gegeven is dat de onzuiverheid van $f_{n,h}(x)$ het volgende asymptotische gedrag in h heeft:

$$h^{-2} \text{Bias}(f_{n,h}(x)) \rightarrow \frac{1}{2} f''(x) \int_{-\infty}^{\infty} y^2 K(y) dy \text{ voor } h \downarrow 0$$

We kiezen $h = h_n = n^\alpha$ voor zekere $\alpha \in \mathbb{R}$.

- c) Bepaal voor welke waarde van α de asymptotische Verwachte Kwadratische Fout (Mean Squared Error; $E_f(f_{n,h}(x) - f(x))^2$) geminimaliseerd wordt.

Normering:

1	a)	5	3	d)	10
	b)	5		a)	5
	c)	5		b)	10
	d)	5		c)	10
2	a)	5	4	a)	5
	b)	10		b)	5
	c)	5		c)	5

Het cijfer wordt als volgt berekend: $\frac{\text{aantal punten} + 10}{100}$.