

1. Het quotiënt van de verwachting en variantie van een Poisson verdeling is gelijk aan 1. Om te toetsen of een steekproef $X_1, \dots, X_n$ afkomstig is uit een Poisson verdeling gebruikt men de statistiek $T_n = \bar{X}_n / S_n^2$. Vooralsnog nemen we aan dat $X_1, \dots, X_n$ een steekproef uit een verdeling is met eindig vierde moment en positieve variantie.
 - a. Bepaal constanten a_n zodanig dat de rij $\sqrt{n}(T_n - a_n)$ in verdeling convergeert naar een normale limiet verdeling.
 - b. Bepaal een kritiek gebied voor een toets gebaseerd op T_n met asymptotische onbetrouwbaarheid α voor het toetsen van de nulhypothese dat $X_1, \dots, X_n$ Poisson verdeeld zijn. (N.B. Derde en vierde moment van de Poisson (θ) verdeling zijn gelijk aan $\theta^3 + 3\theta^2 + \theta$ en $\theta^4 + 6\theta^3 + 7\theta^2 + \theta$.)
 - c. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ niet Poisson verdeeld zijn en dat $EX_1 / \text{var } X_1 \neq 1$. Laat zien dat de kans dat de nulhypothese uit b) wordt verworpen naar 1 convergeert.

2. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke, stochastische grootheden zijn met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = (1 - \theta)^2 x \theta^{x-1}, \quad x = 1, 2, \dots$$

Hierin is $\theta \in (0, 1)$ een onbekende parameter. Nu is $E_\theta X_1 = 2\theta / (1 - \theta) + 1$.

- a. Bepaal de meest aannemelijke schatter voor θ .
 - b. Laat met behulp van a) zien dat de meest aannemelijke schatter consistent is.
 - c. Welke limietverdeling verwacht u op grond van de theorie voor de meest aannemelijke schatter?
 - d. Laat op informele wijze zien dat de Fisher informatie in één waarneming kan worden berekend als $I_\theta = -E_\theta \ddot{\ell}_\theta(X_1)$, waarin $\ell_\theta(x) = \log p_\theta(x)$.
 - e. Bepaal een betrouwbaarheidsinterval voor θ gebaseerd op de meest aannemelijke schatter.
3. Veronderstel dat (X, Y) 2-dimensionaal normaal verdeeld is met verwachting 0 en covariantiematrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$.
 - a. Geef en bewijs een karakterisatie van de verdeling van $X^2 + Y^2$, uitgedrukt in de χ^2 -verdeling;
 - b. Bepaal constanten A en B zodanig dat $AX^2 + BXY + CY^2$ een χ^2 -verdeling met 2 vrijheidsgraden bezit.
4. Veronderstel dat $M_n(\hat{\theta}_n) \geq M_n(\theta_0)$ voor gegeven stochastische functies $M_n: \Theta \mapsto \mathbb{R}$ en stochastische punten $\hat{\theta}_n$ en een niet-stochastisch punt θ_0 in een deelverzameling Θ van $\mathbb{R}^k$ zodanig dat

$$\sup_{\theta \in \Theta} |M_n(\theta) - M(\theta)| \xrightarrow{P} 0,$$

voor een gegeven niet-stochastische functie $M: \Theta \mapsto \mathbb{R}$. Veronderstel verder dat

$$\sup_{\theta: \|\theta - \theta_0\| > \delta} M(\theta) < M(\theta_0), \quad \text{iedere } \delta > 0. \quad (1)$$

- a. Bewijs dat $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$.
 - b. Laat zien dat onder de gegeven voorwaarden θ_0 een punt van absoluut maximum is van M .
 - c. Veronderstel dat Θ compact is, en M continu. Laat zien dat aan (1) voldaan is mits θ_0 een uniek punt van maximum van M is.

5.

- a. Formuleer de stelling van Glivenko-Cantelli.
- b. Formuleer een stelling aangaande de asymptotische verdeling van de Pearson statistiek voor het toetsen van onafhankelijkheid in een $k \times r$ -tabel.

Normering:

1a: 15	2a: 1	3a: 10	4a: 5	5a: 6
1b: 5	2b: 10	3b: 5	4b: 3	5b: 6
1c: 5	2c: 5		4c: 4	
	2d: 5			
	2e: 5			

Eindcijfer = totaal/10+1