

1.

- a. Een binomiaal verdeelde grootheid is verdeeld als de som van onafhankelijke Bernoulli verdeelde grootheden. Voor X_n en Y_n kunnen we deze Bernoulli grootheden onafhankelijk kiezen. Vanwege de multivariate centrale limietstelling geldt daarom

$$\sqrt{n}(X_n/n - p_1, Y_n/n - p_2) \rightsquigarrow N_2 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p_1(1-p_1) & 0 \\ 0 & p_2(1-p_2) \end{pmatrix} \right).$$

Laat (Z_1, Z_2) verdeeld zijn volgens de 2-dimensionale normale verdeling in dit display. Laat $\phi(x, y) = x/y$. Volgens de delta-methode geldt

$$\sqrt{n} \left(\frac{X_n/n}{Y_n/n} - \frac{p_1}{p_2} \right) \rightsquigarrow \phi'_{p_1, p_2}(Z_1, Z_2) = \frac{1}{p_2} Z_1 + \frac{-p_1}{p_2^2} Z_2.$$

De variabele aan de rechterkant is normaal verdeeld met verwachting en variantie

$$E \frac{1}{p_2} Z_1 + \frac{-p_1}{p_2^2} Z_2 = 0.$$

$$\sigma^2 := \text{var} \left(\frac{1}{p_2} Z_1 + \frac{-p_1}{p_2^2} Z_2 \right) = \frac{p_1(1-p_1)}{p_2^2} + \frac{p_1^2(1-p_2)}{p_2^3}.$$

- b. We schatten σ^2 door in de laatste uitdrukking p_1 en p_2 te vervangen door X_n/n en Y_n/n . Dit geeft een schatter $\hat{\sigma}_n^2$ met de eigenschap $\hat{\sigma}_n \xrightarrow{P} \sigma$, vanwege de continue-afbeelding stelling. Vanwege Slutsky vinden we dat

$$\sqrt{n} \frac{\left(\frac{X_n/n}{Y_n/n} - \frac{p_1}{p_2} \right)}{\hat{\sigma}_n} \rightsquigarrow N(0, 1).$$

Een asymptotisch betrouwbaarheidsinterval voor p_1/p_2 is daarom $X_n/Y_n \pm \hat{\sigma}_n/\sqrt{n} \xi_{\alpha/2}$.

2.

- a. Omdat $P(X_{n(1)} > x) = P(X_1 > x)^n = (1 - x^3)^n \rightarrow 0$ voor $0 < x < 1$ en $P(0 < X_{n(1)} < 1) = 1$ geldt dat $X_{n(1)} \xrightarrow{P} 0$. Volgens een soortgelijk argument geldt ook $X_{n(n)} \xrightarrow{P} 1$. Vanwege de continue-afbeelding stelling geldt daarom dat $X_{n(n)} + \cos X_{n(1)} \xrightarrow{P} 1 + \cos 0 = 2$.
- b. Omdat $X_{n(1)} \xrightarrow{P} 0$ proberen we $a_n = 0$. Voor $x > 0$ geldt

$$P(b_n X_{n(1)} > x) = P(X_{n(1)} > x/b_n) = P(X_1 > x/b_n)^n = \left(1 - \left(\frac{x}{b_n} \right)^3 \right)^n.$$

Nemen we $b_n = n^{1/3}$, dan convergeert dit naar e^{-x^3} . De rij $n^{1/3} X_{n(1)}$ convergeert derhalve in verdeling naar de kansverdeling met verdelingsfunctie $1 - e^{-x^3}$ op $(0, \infty)$ (en 0 op $(-\infty, 0)$).

3. Zie dictaat

4.

- a. De schatter $\hat{\theta}_n$ is een oplossing van de vergelijking $\Psi_n(\theta) = 0$ voor $\Psi_n(\theta) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \psi_\theta(X_i)$ en $\psi_\theta(x) = x^2(x - \theta)^3$. Vanwege de Wet van de Grote Aantallen geldt $\Psi_n(\theta) \xrightarrow{P} \Psi(\theta) = EX_1^2(X_1 - \theta)^3$. We verwachten dat $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$ voor θ_0 de oplossing van $\Psi(\theta_0) = 0$. Aangezien $EX_1^2X_1^3 = 0$ vanwege de symmetrie van de normale verdeling verwachten we dat $\theta_0 = 0$.
- b. We verwachten dat $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$ voor

$$\sigma^2 = \frac{E\psi_{\theta_0}^2(X_1)}{(E\dot{\psi}_{\theta_0}(X_1))^2}.$$

Voor $\theta_0 = 0$ wordt de variantie $EX_1^{10}/(3EX_1^4)^2 = 35/3$.

- c. Vanwege de Centrale Limietstelling geldt dat $\sqrt{n}\bar{X}_n \rightsquigarrow N(0, 1)$ onder $\mu = 0$. De relatieve efficiëntie is daarom $1/(35/3)$ onder $\mu = 0$.
- d. De functie $\theta \mapsto \psi_\theta(x)$ is continu en strict monotoon dalend voor iedere $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ van ∞ tot $-\infty$ (met een nulpunt in $\theta = x$). De functies $\theta \mapsto \Psi_n(\theta)$ en $\theta \mapsto \Psi(\theta)$ zijn daarom ook strict dalend, met unieke nulpunten $\hat{\theta}_n$ en $\theta_0 = 0$. Gecombineerd met de argumenten onder a) en Lemma 4.9 uit het dictaat (1998/99), volgt daarom dat $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$.

5. Zie dictaat.