

1. Zie het dictaat.

2.

- a. De function $\phi(u, v) = u/v$ is differentieerbaar in (μ_1, μ_2) met afgeleide $\phi'_{(\mu_1, \mu_2)} = (1/\mu_2, -\mu_1/\mu_2^2)$. De rij $\sqrt{n}((\bar{X}_n, \bar{Y}_n) - (\mu_1, \mu_2))$ convergeert in verdeling naar de $N_2(0, \Sigma)$ -verdeling vanwege de centrale limietstelling. Als (T_1, T_2) deze verdeling bezit, dan geldt vanwege de Delta-methode $\sqrt{n}(\bar{X}_n/\bar{Y}_n - \mu_1/\mu_2) \rightsquigarrow T_1/\mu_2 - \mu_1 T_2/\mu_2^2$. De limietvariable is normaal verdeeld met verwachting 0 en variantie

$$\text{var}\left(\frac{T_1}{\mu_2} - \frac{\mu_1 T_2}{\mu_2^2}\right) = \frac{1}{\mu_2^2} + \frac{\mu_1^2}{\mu_2^4} - 2\frac{\mu_1 \rho}{\mu_2^3}.$$

- b. We kunnen schrijven $n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n) = \bar{X}\bar{Y}_n - \bar{X}_n \bar{Y}_n$. Vanwege de wet van de grote aantallen $(\bar{X}\bar{Y}_n, \bar{X}_n, \bar{Y}_n) \xrightarrow{P} (EX_1 Y_1, \mu_1, \mu_2)$. Dus vanwege de continue afbeeldingsstelling $\bar{X}\bar{Y}_n - \bar{X}_n \bar{Y}_n \xrightarrow{P} EX_1 Y_1 - \mu_1 \mu_2 = \text{cov}(X_1, Y_1)$.
- c. Definieer $\hat{\rho}$ als de schatter in b. Dan is

$$S^2 := \frac{1}{\bar{Y}^2} + \frac{\bar{X}^2}{\bar{Y}^4} - 2\frac{\bar{X}\hat{\rho}}{\bar{Y}^3}$$

een consistente schatter voor de asymptotische variantie in a, en S een consistente schatter voor de standaard afwijking. Vanwege Slutsky's lemma $\sqrt{n}(\bar{X}_n/\bar{Y}_n - \mu_1/\mu_2)/S \rightsquigarrow N(0, 1)$. Een asymptotisch betrouwbaarheidsinterval met betrouwbaarheidsnivo $1 - \alpha$ voor μ_1/μ_2 is dus $\mu_1/\mu_2 = \bar{X}_n/\bar{Y}_n \pm S/\sqrt{n}z_{\alpha/2}$.

3.

- a. Dit betreft de chikwadraat toets voor onafhankelijkheid in een (2×2) -tabel. De tabel met relatieve rand totalen is

5	7	12/ 67
25	30	55/67
30/67	37/67	

De toetsingsgrootte is:

$$\begin{aligned} & \frac{(5 - 67(12/67)(30/67))^2}{67(12/67)(30/67)} + \frac{(7 - 67(12/67)(37/67))^2}{67(12/67)(37/67)} \\ & + \frac{(25 - 67(55/67)(30/67))^2}{67(55/67)(30/67)} + \frac{(30 - 67(55/67)(37/67))^2}{67(55/67)(37/67)}. \end{aligned}$$

- b. We nemen aan dat de vier getallen in de tabel een realisatie vormen van een matrix X_{ij} zodanig dat $(X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22})$ multinomiaal verdeeld is met parameters $n = 67$ en $(p_{11}, p_{12}, p_{21}, p_{22})$. De nulhypothese zegt dat er vectoren (a_1, a_2) en (b_1, b_2) zijn met positieve coördinaten zodanig dat $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 = 1$ en zodanig dat $p_{ij} = a_i b_j$ voor iedere $(i, j) \in \{1, 2\}^2$.

- c. De kritieke waarde vinden we uit de chikwadraat tabel met $(2-1)(2-1) = 1$ vrijheidsgraad. We nemen het rechter α -kwantiel voor onbetrouwbaarheid α en verwerpen voor grote waarden van de toetsingsgrootheid.

4.

- a. De voorwaardelijke dichtheid van Y_i gegeven $X_i = x$ kan worden geschreven in de vorm

$$p_\theta(x)^y (1 - p_\theta(x))^{1-y}, \quad y \in \{0, 1\}.$$

(Vergelijk de alternatieve verdeling.) Aangezien $P_\theta((Y, X) = (y, x)) = P_\theta(Y = y | X = x)P(X = x)$ is de kansdichtheid van (Y_i, X_i) gelijk aan

$$p_\theta(x)^y (1 - p_\theta(x))^{1-y} p_X(x),$$

waarin p_X de dichtheid van X_i is.

- b. De score-functie wordt gegeven door

$$\begin{aligned} \dot{\ell}_\theta(y, x) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \log(p_\theta(x)^y (1 - p_\theta(x))^{1-y} p_X(x)) \\ &= \frac{y}{p_\theta(x)} \dot{p}_\theta(x) - \frac{1-y}{1-p_\theta(x)} \dot{p}_\theta(x) \\ &= \frac{y - p_\theta(x)}{p_\theta(x)(1-p_\theta(x))} \dot{p}_\theta(x). \end{aligned}$$

De Fisher informatie is het tweede moment van deze uitdrukking, en wordt gegeven door

$$\sum_{y \in \{0,1\}} \sum_x \frac{(y - p_\theta(x))^2}{p_\theta^2(x)(1-p_\theta(x))^2} \dot{p}_\theta(x)^2 p_\theta(x)^y (1-p_\theta(x))^{1-y} p_X(x).$$

De som over y kan met enig rekenwerk (als bij het berekenen van de Fisher informatie voor p bij de alternatieve verdeling met parameter p) worden bepaald en we vinden

$$\sum_x \frac{\dot{p}_\theta(x)^2}{p_\theta(x)(1-p_\theta(x))} p_X(x) = E \frac{\dot{p}_\theta(X_1)^2}{p_\theta(X_1)(1-p_\theta(X_1))}.$$

Met $p_\theta(x) = \Psi(\theta x)$ geeft dit de gevraagde uitdrukking.

- c. De algemene formule is $\theta = \hat{\theta} \pm n^{-1/2} \hat{i}^{-1/2} z_{\alpha/2}$, waarin $\hat{i}$ een consistente schatter is voor de Fisher informatie in één waarneming.
- d. Bij b. is berekend dat $i(\theta) = E g(X_1, \theta)$ voor zekere functie $g(x, \theta)$. Voor vaste θ kunnen we deze verwachting schatten met het gemiddelde $n^{-1} \sum_{i=1}^n g(X_i, \theta)$. Deze schatter is consistent vanwege de wet van de grote aantallen. Aangezien θ onbekend is, vervangen we deze nog door zijn schatter en definiëren

$$\hat{i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Psi'(\hat{\theta} X_i)^2 X_i^2}{\Psi(\hat{\theta} X_i)(1 - \Psi(\hat{\theta} X_i))}.$$

Met behulp van de gegevens vinden we

$$\hat{i} = \frac{1}{100} \left(50(0) + 50 \frac{(2/9)^2 (\log 2)^2}{(1/3)(2/3)} \right) = \frac{(\log 2)^2}{9}.$$

Het betrouwbaarheidsinterval wordt $\theta = 1 \pm (1/10)(\hat{i})^{-1/2} 1.96$.

5. De schatter $\hat{\theta}$ is nulpunt van de vergelijking $\sum_{i=1}^n \psi(X_i - \theta) = 0$ voor $\psi(x) = 2(\Phi(x) - 1)$.
- a. De functie ψ is antisymmetrisch rond de oorsprong en strict stijgend van -1 in $-\infty$ tot 1 in ∞ . Omdat de Cauchy verdeling symmetrisch is rond de oorsprong geldt voor een Cauchy-verdeelde stochastische grootte X dat $E\psi(X) = 0$. Omdat de Cauchy verdeling een strict positieve dichtheid bezit en ψ strict stijgend is, geldt dat $\theta \mapsto E\psi(X - \theta)$ strict dalend is. Immers wordt θ groter dan wordt $X - \theta$, en dus ook $\psi(X_\theta)$ kleiner en daalt zijn verwachting. De oorsprong is dus het enige nulpunt. Omdat $n^{-1}\sum_{i=1}^n \psi(X_i - \theta)$ convergeert naar $E\psi(X - \theta)$ voor iedere θ , verwachten we dat $\hat{\theta}_n$ convergeert naar een nulpunt van $\theta \mapsto E\psi(X - \theta)$, dus de oorsprong. (We kunnen dit bewijzen met behulp van een lemma uit het dictaat, maar dat wordt niet gevraagd.)
- b. Volgens een stelling uit het dictaat is de limietverdeling van $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - 0)$ de normale verdeling met verwachting 0 en variantie

$$\frac{E\psi^2(X)}{(E\frac{\partial}{\partial\theta}\psi(X - \theta))_{|\theta=0}^2} = \frac{\int (2\Phi(x) - 1)^2 \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx}{\left(\int 2\phi(x) \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx\right)^2}.$$