



1. Met behulp van de delta-methode kan men de limietverdeling van $\sqrt{n}(\phi(T_n) - \phi(\theta))$ afleiden uit de limietverdeling van $\sqrt{n}(T_n - \theta)$. Formuleer een precieze stelling en geef een bewijs.
2. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ en $Y_1, \dots, Y_n$ twee onderling onafhankelijke steekproeven zijn uit kansverdelingen met verwachtingen μ , respectievelijk ν , en eindige varianties. Om te toetsen $H_0: (\mu, \nu) = (0, 0)$ gebruikt men de toetsingsgrootheid $(\bar{X}_n)^2/S_{X,n}^2 + (\bar{Y}_n)^2/S_{Y,n}^2$, waarin $S_{X,n}^2$ en $S_{Y,n}^2$ de steekproefvarianties zijn. Bepaal kritieke waarden zodanig dat de toets asymptotisch onbetrouwbaarheid α bezit. Geef een duidelijke argumentatie van de verschillende stappen van uw afleiding.
3. Laat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijk en exponentieel verdeeld met parameter θ . Bepaal de limietverdelingen en de asymptotische relatieve efficiëntie van de schatters $1 - e^{\hat{\theta}t}$ en $\mathbb{F}_n(t)$ voor de verdelingsfunctie van X_i in t (voor gegeven $t > 0$ en $\theta > 0$). Hierin is $\hat{\theta} = 1/\bar{X}_n$ de meest aannemelijke schatter voor θ en $\mathbb{F}_n$ de empirische verdelingsfunctie.
4. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke stochastische grootheden zijn met kansdichtheid

$$p_\theta(x) = \frac{x^{\theta-1}e^{-x}}{\Gamma(\theta)}, \quad x > 0.$$

- a. Laat, op informele wijze, zien dat de Fisher informatie in 1 waarneming kan worden berekend als $I_\theta = -E_\theta \ell_\theta'(X_1)$, waarin $\ell_\theta(x) = \log p_\theta(x)$;
 - b. Druk de Fisher informatie uit in de Gamma-functie Γ en zijn afgeleiden;
 - c. Bepaal een asymptotisch betrouwbaarheidsinterval voor θ gebaseerd op de meest aannemelijke schatter. Licht uw antwoord toe met behulp van een stelling (die u op informele wijze mag citeren).
5. Veronderstel dat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijke stochastische grootheden zijn met de $N(0, 1/9)$ -verdeling. We definiëren een schatter $\hat{\theta}_n$ als het punt waar de functie $\theta \mapsto \sum_{i=1}^n e^{(X_i - \theta)^2}$ minimaal is.
 - a. Maak aannemelijk dat $\hat{\theta}_n$ in kans convergeert naar een punt θ_0 . Welk punt?
 - b. Welke limietverdeling verwacht u voor de rij $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$? Uw antwoord mag ongeëvalueerde integralen bevatten.
 - c. Geef een precies bewijs dat $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$, bijvoorbeeld door gebruik te maken van een stelling of lemma uit het dictaat.

Normering:

1: 15	2: 15	3: 20	4a: 5	5a: 5
			4b: 5	5b: 10
			4c: 10	5c: 5

Eindcijfer = totaal/10+1