



1. Zie het dictaat.

2. Volgens de centrale limietstelling geldt dat $\sqrt{n}\bar{X}_n \rightsquigarrow N(0, \sigma^2)$, onder H_0 , voor $\sigma^2 = \text{var} X_1$. Verder geldt

$$S_{X,n}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}_n^2 \xrightarrow{P} EX_1^2 - (EX_1)^2 = \sigma^2,$$

vanwege de wet van de grote aantallen en de continue afbeeldingsstelling. (Voor de zuivere versie van de steekproefvariantie vermenigvuldigen we met $n/(n-1) \rightarrow 1$ en is het resultaat hetzelfde.) Combinatie met Slutsky's lemma geeft dat, onder H_0 , $T_{X,n} := \sqrt{n}\bar{X}_n/S_{X,n} \rightsquigarrow N(0, 1)$. Vervolgens geldt dat $T_{X,n}^2 \rightsquigarrow \chi_1^2$ vanwege de continue afbeeldingsstelling en de definitie van de chikwadraat verdeling. Ditzelfde geldt ook voor $T_{Y,n}^2$. Omdat $X_1, \dots, X_n$ en $Y_1, \dots, Y_n$ onafhankelijk zijn, geldt dat de stochastische vectoren $(T_{X,n}^2, T_{Y,n}^2)$ in verdeling naar een paar van onafhankelijke χ_1^2 -verdeelde stochastische grootheden convergeert. Nog een toepassing van de continue afbeeldingsstelling en de eigenschappen van de chikwadraat verdeling laten dan zien dat $T_n^2 := T_{X,n}^2 + T_{Y,n}^2 \rightsquigarrow \chi_2^2$.

We verwerpen voor grote waarden van T_n^2 . De kritieke waarde kiezen we gelijk aan het rechter α -punt van de chikwadraat verdeling met 2 vrijheidsgraden.

3. Verwachting en variantie van de exponentiële verdeling zijn gelijk aan $1/\theta$ en $1/\theta^2$. Volgens de centrale limietstelling geldt derhalve dat $\sqrt{n}(\bar{X}_n - 1/\theta) \rightsquigarrow N(0, 1/\theta^2)$. Een toepassing van de delta-methode levert vervolgens

$$\sqrt{n}((1 - e^{-t/\bar{X}_n}) - (1 - e^{-t\theta})) \rightsquigarrow -t\theta^2 e^{-\theta t} N(0, 1/\theta^2) = N(0, t^2 \theta^2 e^{-2\theta t}).$$

De empirische verdeling $\mathbb{F}_n(t)$ is een gemiddelde van de stochastische grootheden $1\{X_i \leq t\}$ met verwachting $F(t) = 1 - e^{-t\theta}$ en variantie $F(t)(1 - F(t))$. De centrale limietstelling geeft dus dat $\sqrt{n}(\mathbb{F}_n(t) - F(t)) \rightsquigarrow N(0, (1 - e^{-t\theta})e^{-t\theta})$. De asymptotische relatieve efficiëntie is het quotiënt van de asymptotisch varianties, dus

$$\frac{t^2 \theta^2 e^{-2\theta t}}{(1 - e^{-t\theta})e^{-t\theta}}$$

(Met enige moeite is in te zien dat dit getal kleiner is dan 1: de meest aannemelijke schatter is efficiënter.)

4. Zie som 5 van het tentamen van juli 97.

5. Zie som 5 van het tentamen van juli 97. Weliswaar zijn de waarnemingen nu normaal verdeeld (i.p.v. Laplace) en is de criterium functie gebaseerd op $m(x) = e^{x^2}$ (i.p.v. x^4), maar dit verandert het idee van de uitwerking niet. Merk nog op dat de afgeleide functie $2xe^{x^2}$ van e^{x^2} strict stijgend is en asymmetrisch rond 0.