

De normering van de verschillende opgaven is niet uniform. Zie aan het einde van het tentamen.

1. Laat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijk zijn met kansdichtheid

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{anders.} \end{cases}$$

Bepaal constanten a_n en b_n zodanig dat $b_n(X_{(n)} - a_n)$ in verdeling convergeert naar een niet-triviale limietverdeling.

2. Laat $X_1, \dots, X_n$ en $Y_1, \dots, Y_n$ onderling onafhankelijke steekproeven zijn uit kansverdelingen met positieve varianties σ_X^2 en σ_Y^2 en eindige vierde momenten. We schatten σ_X^2/σ_Y^2 met het quotiënt $S_{n,X}^2/S_{n,Y}^2$ van de steekproefvarianties. Voor de eenvoud kunt u aannemen dat de verwachtingen van de X_i en Y_i gelijk zijn aan 0.
- Bepaal de limietverdeling van $\sqrt{n}(S_{n,X}^2/S_{n,Y}^2 - \sigma_X^2/\sigma_Y^2)$;
 - Geef een consistente schatter voor de asymptotische variantie in a;
 - Bepaal een asymptotisch betrouwbaarheidsinterval voor σ_X^2/σ_Y^2 .

3. Classificatie van een aselechte steekproef ter grootte 50 uit een populatie op 2 eigenschappen levert de volgende 2×2 -tabel:

7	8
17	18

Zij H_0 de hypothese dat de 2 eigenschappen onderling onafhankelijk zijn.

- Geef een numerieke uitdrukking voor de waarde van een toetsingsgrootte voor een geschikte toets om H_0 te toetsen. (Uw antwoord is dus een getal, maar u mag volstaan met een uitdrukking waarin alleen getallen voorkomen, zonder deze door te rekenen.)
 - Hoe kan de bijbehorende kritieke waarde worden gevonden?
4. Laat $X_1, \dots, X_n$ onderling onafhankelijk en standaard normaal verdeeld zijn. Bewijs dat $\sum_{i=1}^n |X_i - \bar{X}_n|/S_n$ en $\bar{X}_n$ onderling onafhankelijk zijn.
5. Veronderstel dat $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ onderling onafhankelijke stochastische vectoren zijn die voldoen aan het niet-lineaire regressiemodel

$$Y = f_\theta(X) + e,$$

waarin de stochastische grootte e onafhankelijk is van X , en de functie f_θ bekend is op een parameter $\theta \in \mathbb{R}$ na. We beschouwen de KK-schatter $\hat{\theta}_n$ die de functie $\theta \mapsto \sum_{i=1}^n |Y_i - f_\theta(X_i)|^2$ minimaliseert.

- Onder welke voorwaarden op e en de klasse regressie functies f_θ mogen we verwachten dat de schatter $\hat{\theta}_n$ asymptotisch consistent is?
- Welke limietverdeling verwacht u voor de rij $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$?

6. Veronderstel dat $(Y_1, X_1), \dots, (Y_n, X_n)$ onderling onafhankelijke identiek verdeelde stochastische vectoren zijn met $Y_i \in \{0, 1\}$ en voorwaardelijke kansverdeling gegeven door

$$P_\theta(Y_i = 1 | X_i = x) = \frac{1}{1 + e^{\theta x}}.$$

(Dus gegeven X_i is Y_i alternatief verdeeld.) De marginale kansdichtheid van X_i is onafhankelijk van de parameter. We schatten de onbekende parameter $\theta \in \mathbb{R}$ met de meest aannemelijke schatter $\hat{\theta}_n$.

- a. Laat zien dat de Fisher informatie voor θ in één waarneming (Y_i, X_i) gegeven wordt door, met $\Psi(x) = (1 + e^x)^{-1}$,

$$i(\theta) = E \frac{\Psi'(\theta X_1)^2 X_1^2}{\Psi(\theta X_1)(1 - \Psi(\theta X_1))}.$$

Numerieke maximalisatie van de likelihoodsfunctie op grond van de waarnemingen geeft de m.a. schatting $\hat{\theta} = 1$. Het aantal waarnemingen is $n=100$ en de waargenomen $x_1, \dots, x_{100}$ zijn 50 keer 0 en 50 keer log 2.

- b. Bepaal met deze gegevens een benaderend numeriek betrouwbaarheidsinterval voor θ gebaseerd op de meest aannemelijke schatter.

Normering:

1: 10	2a: 15	3: 10	4: 10	5a: 10	6a: 5
	2b: 5			5b: 10	6b: 10
	2c: 5				

Eindcijfer = totaal/10+1