

1.

- a. De function $\phi(u, v) = u/v$ is differentieerbaar in (μ_1, μ_2) met afgeleide $\phi'_{(\mu_1, \mu_2)} = (1/\mu_2, -\mu_1/\mu_2^2)$. De rij $\sqrt{n}((\bar{X}_n, \bar{Y}_n) - (\mu_1, \mu_2))$ convergeert in verdeling naar de $N(0, \Sigma)$ -verdeling vanwege de centrale limietstelling. Als (T_1, T_2) deze verdeling bezit, dan geldt vanwege de Delta-methode $\sqrt{n}(\bar{X}_n/\bar{Y}_n - \mu_1/\mu_2) \rightsquigarrow T_1/\mu_2 - \mu_1 T_2/\mu_2^2$. De limietvariable is normaal verdeeld met verwachting 0 en variantie, met σ_{ij} het (i, j) -element van Σ ,

$$\text{var}\left(\frac{T_1}{\mu_2} - \frac{\mu_1 T_2}{\mu_2^2}\right) = \frac{\sigma_{11}}{\mu_2^2} + \frac{\mu_1^2 \sigma_{22}}{\mu_2^4} - 2 \frac{\mu_1 \sigma_{12}}{\mu_2^3}.$$

- b. We kunnen schrijven $n^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)(Y_i - \bar{Y}_n) = \overline{XY}_n - \bar{X}_n \bar{Y}_n$. Vanwege de wet van de grote aantallen $(\overline{XY}_n, \bar{X}_n, \bar{Y}_n) \xrightarrow{P} (EX_1 Y_1, \mu_1, \mu_2)$. Dus vanwege de continue afbeeldingsstelling $\overline{XY}_n - \bar{X}_n \bar{Y}_n \xrightarrow{P} EX_1 Y_1 - \mu_1 \mu_2 = \text{cov}(X_1, Y_1)$.
- c. Laat S_X^2 en S_Y^2 de steekproefvarianties van de X_i en Y_i zijn en definieer $S_{X,Y}$ als de schatter in b. Dan is

$$S^2 := \frac{S_X^2}{\bar{Y}^2} + \frac{\bar{X}^2 S_Y^2}{\bar{Y}^4} - 2 \frac{\bar{X} S_{X,Y}}{\bar{Y}^3}$$

een consistente schatter voor de asymptotische variantie in a, en S een consistente schatter voor de standaard afwijking. Vanwege Slutsky's lemma $\sqrt{n}(\bar{X}_n/\bar{Y}_n - \mu_1/\mu_2)/S \rightsquigarrow N(0, 1)$. Een asymptotisch betrouwbaarheidsinterval met betrouwbaarheidsnivo $1 - \alpha$ voor μ_1/μ_2 is dus $\mu_1/\mu_2 = \bar{X}_n/\bar{Y}_n \pm S/\sqrt{n} z_{\alpha/2}$.

2.

- a. Voor de exponentiële verdeling is de variantie het kwadraat van de verwachting. Dus geldt vanwege de centrale limietstelling $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta) \rightsquigarrow N(0, \theta^2)$. Een variantie-stabiliserende transformatie is de primitieve van $1/\theta$ (1 gedeeld door de asymptotische standaardafwijking), dus $\log \theta$.
- b. Dus $\sqrt{n}(\log \bar{X}_n - \log \theta) \rightsquigarrow N(0, 1)$ voor alle θ . Dit geeft het betrouwbaarheidsinterval $\log \bar{X}_n \pm n^{-1/2} z_{\alpha/2}$ voor $\log \theta$, en $[\bar{X}_n e^{-z_{\alpha/2}/\sqrt{n}}, \bar{X}_n e^{z_{\alpha/2}/\sqrt{n}}]$ voor θ .

3.

- a. De gegeven matrix Σ heeft eigenwaarden λ_1 en λ_2 gelijk aan $5 \pm 2\sqrt{5}$. Dus er bestaat een orthogonale matrix O met $O\Sigma O^T$ gelijk aan de diagonaal matrix Λ met elementen λ_1 en λ_2 . De lineaire transformatie $O(X, Y)^T$ is 2-dimensionaal normaal verdeeld met verwachting 0 en covariantiematrix $O\Sigma O^T = \Lambda$. Dus deze vector is gelijk verdeeld aan de vector $(\sqrt{\lambda_1} Z_1, \sqrt{\lambda_2} Z_2)$ voor onderling onafhankelijke, $N(0, 1)$ -verdeelde grootheden Z_1 en Z_2 . Dan is $X^2 + Y^2 = \|O(X, Y)^T\|^2$ verdeeld als $\|(\sqrt{\lambda_1} Z_1, \sqrt{\lambda_2} Z_2)\|^2 = \lambda_1 Z_1^2 + \lambda_2 Z_2^2$. Nu zijn Z_1^2 en Z_2^2 onderling onafhankelijke grootheden met de χ_1^2 -verdeling.
- b. Er geldt

$$AX^2 + BXY + CY^2 = (X, Y) \begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}.$$

Volgens het dictaat heeft deze kwadratische vorm een χ^2 -verdeling met 2 vrijheidsgraden als we de matrix in deze kwadratische vorm gelijk kiezen aan de inverse van de covariantie matrix van (X, Y) . Dus

$$\begin{pmatrix} A & \frac{1}{2}B \\ \frac{1}{2}B & C \end{pmatrix} = \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{5}.$$

4. Zie het dictaat.

5.

a. Zie het dictaat.

b. Er geldt:

$$\ell_{\theta}(x) = (\theta - 1) \log x - x - \log \Gamma(\theta)$$

$$\dot{\ell}_{\theta}(x) = \log x - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(\theta)$$

$$\ddot{\ell}_{\theta}(x) = -\frac{\Gamma\Gamma'' - (\Gamma')^2}{\Gamma^2}(\theta).$$

De Fisher informatie is min de rechterkant van de laatste vergelijking. (De verwachting nemen hoeft niet meer.)

c. Laat $\hat{\theta}_n$ de meest aannemelijke schatter. Onder bepaalde voorwaarden, zoals differentieerbaarheid van de dichtheid in θ , geldt dat $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ naar een normale verdeling met verwachting 0 en variantie $1/I_{\theta}$ convergeert. Als $\theta \mapsto I_{\theta}$ continu is (zoals hier), dan $I_{\hat{\theta}_n} \xrightarrow{P} I_{\theta}$. Een betrouwbaarheidsinterval kan nu worden geconstrueerd als $\hat{\theta}_n \pm (I_{\hat{\theta}_n} n)^{-1/2} z_{\alpha/2}$.

6. Laat $\mathbb{P}_n$ en P de empirische en echte kansverdeling van $X_1, \dots, X_n$ zijn.

a. Vanwege de wet van de grote aantallen convergeert $M_n(\theta) = \mathbb{P}_n(x - \theta)^4$ in kans naar $M(\theta) := E(X_1 - \theta)^4$, voor iedere θ . We verwachten dat $\hat{\theta}_n$ in kans naar het punt θ_0 convergeert dat $\theta \mapsto M(\theta)$ minimaliseert. De afgeleide van $M(\theta)$ is $\Psi(\theta) = -4E(X_1 - \theta)^3$. Vanwege symmetrie is $\Psi(0) = 0$. Vanwege monotonie is dit het enige nulpunt (zie ook c.). Dus we verwachten dat $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} 0$.

b. Definieer $\psi_{\theta}(x) = (x - \theta)^3$. Dan voldoet $\hat{\theta}_n$ aan $\mathbb{P}_n \psi_{\hat{\theta}_n} = 0$. Vanwege stellingen uit het dictaat verwachten we dat $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$ normaal verdeeld is met verwachting 0 en variantie

$$\frac{E\psi_0^2(X_1)}{(E\psi_0(X_1))^2} = \frac{EX_1^6}{(3EX_1^2)^2} = \frac{6!}{36}.$$

c. De functie $\theta \mapsto \psi_{\theta}(x)$ is strict dalend van ∞ tot $-\infty$, voor iedere x . Hetzelfde is waar voor de functies $\theta \mapsto \mathbb{P}_n \psi_{\theta}$ en $\theta \mapsto P\psi_{\theta} = E\psi_{\theta}(X_1)$. Het (unieke) nulpunt van $\theta \mapsto P\psi_{\theta}$ is $\theta = 0$. Bovendien geldt $\mathbb{P}_n \psi_{\theta} \xrightarrow{P} P\psi_{\theta}$ voor alle θ vanwege de wet van de grote aantallen. De convergentie $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$ volgt nu uit een lemma in het dictaat.