

TENTAMEN MATHEMATISCHE PROGRAMMERING

25 maart 2004

Dit tentamen bestaat uit 7 opgaven waarvoor totaal 120 (!) punten te scoren zijn. Het tentamencijfer is het aantal behaalde punten gedeeld door 10. Het eindcijfer wordt bepaald door het tentamencijfer eventueel nog op te hogen met de bonus van de opdrachten. Cijfers hoger dan 10 worden naar 10 'afgerond'.

Puntentelling

	totaal	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
1	30	7	3	6	3	5	6
2	15	3	6	6			
3	15	6	9				
4	15	3	8	4			
5	15	3	6	6			
6	15	8	4	3			
7	15	9	6				

Rekenmachine is toegestaan.

Controleer regelmatig de website

<http://www.feweb.vu.nl/ectrie/matprog/default.htm>
voor aankondigingen betreffende een 'veeg'-tentamen.

Opgave 1

Beschouw het lineair programmeringsprobleem in standaardvorm met n beslissingsvariabelen en m restricties:

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}. \quad (1)$$

(Vectoren en matrices zijn vetgedrukt; vectoren zijn kolomvectoren; superscript T betekent getransponeerde; $m < n$; $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$.)

- (a). Veronderstel dat het aantal variabelen n in (1) veel groter is dan het aantal restricties m . Beschrijf de methode van kolomgeneratie om (1) op te lossen. Geef het bijbehorende stappenplan.

Gegeven is de volgende instantie:

$$\left. \begin{array}{ll} \max & 5x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 11x_4 - 3x_5 + 7x_6 \\ \text{onder} & 6x_1 + 7x_2 - 9x_3 + 7x_4 + 2x_5 + 5x_6 = 15 \\ & 4x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 - x_5 + 5x_6 = 18 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 + 8x_5 + 8x_6 = 17 \\ & x_1, \dots, x_6 \geq 0. \end{array} \right\} \quad (2)$$

- (b). Geef expliciet de matrix $\mathbf{A}$ en de vectoren $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$.

De deelmatrix van de 1-ste, 3-de en 4-de kolom van $\mathbf{A}$ is niet-singulier:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 7 \\ 4 & -1 & 6 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

We noemen $\mathbf{B}$ een basis van (2). $\mathbf{R}$ is de deelmatrix van de overige kolommen van $\mathbf{A}$. Bij deze basis zijn

$$\hat{\mathbf{b}} := \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4.329 \\ 1.503 \\ 0.364 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}} := (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A})^T - \mathbf{c} = (0, 5.321, 0, 0, -0.139, -3, 298)^T.$$

Een vector $\mathbf{x}$ wordt gedefinieerd door $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_R)$ met $\mathbf{x}_B = \hat{\mathbf{b}}$ en $\mathbf{x}_R = \mathbf{0}$. We noemen $\mathbf{x}$ een BO (basisoplossing). Dus

$$\mathbf{x} = (4.329, 0, 1.503, 0.364, 0, 0)^T.$$

- (c). Bewijs dat $\mathbf{x}$ een toegelaten oplossing is van (2) (we zeggen dat $\mathbf{x}$ een primale TBO (toegelaten basisoplossing) is). Waarom is $\mathbf{x}$ niet optimaal? Bewijs de voorwaarden die je gebruikt.
- (d). Formuleer het duale probleem van (2) met variabelen y_1, y_2, y_3 .

Beschouw nu de basis van de 2-de, 4-de en 6-de kolom van $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 \\ -4 & 6 & 5 \\ 2 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Bij deze basis zijn

$$\hat{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} -0.329 \\ 0.619 \\ 2.594 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}} := (1.201, 0, 3.396, 0, 0.237, 0)^T.$$

De vector $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B = \hat{\mathbf{b}}, \mathbf{x}_R = \mathbf{0})$ is weer een BO:

$$\mathbf{x} = (0, -0.329, 0, 0.619, 0, 2.594)^T.$$

Duidelijk is $\mathbf{x}$ niet toegelaten is voor het primale (2). Een vector $\mathbf{y}$ wordt gedefinieerd door $\mathbf{y} = (\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1})^T$. Uitrekenen geeft

$$\mathbf{y} = (0.095, 1.580, -0.172)^T.$$

- (e). Bewijs dat $\mathbf{y}$ een toegelaten oplossing is van het duale probleem (we zeggen dat $\mathbf{x}$ een duale TBO is). Waarom is $\mathbf{y}$ niet optimaal? Waarom is de (duale) criteriumwaarde van deze $\mathbf{y}$ hoger dan de (primale) criteriumwaarde van de oplossing $\mathbf{x}$ in (c)?
- (f). Beschrijf nu de iteratiestap van het duale simplex-algoritme om vanuit de duale TBO $\mathbf{x}$ een nieuwe duale TBO te construeren zodat de bijbehorende $\mathbf{y}$ een betere oplossing is van het duale probleem. Wanneer is $\mathbf{y}$ optimaal (voor het duale probleem)? Is dan $\mathbf{x}$ een optimale TBO?

Opgave 2

- (a). Beschrijf het handelsreizigersprobleem in woorden en geef een praktische toepassing.

Beschouw een instantie van het handelsreizigersprobleem met $n = 8$ steden, gegeven door de symmetrische afstandstabel $(c_{ij})_{i,j=1}^n$:

$$\begin{array}{c}
 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\
 \begin{pmatrix}
 \infty & 29 & 64 & 64 & 69 & 26 & 67 & 25 \\
 29 & \infty & 71 & 70 & 88 & 11 & 37 & 80 \\
 64 & 71 & \infty & 16 & 16 & 11 & 30 & 56 \\
 64 & 70 & 16 & \infty & 16 & 27 & 44 & 34 \\
 69 & 88 & 16 & 16 & \infty & 95 & 84 & 92 \\
 26 & 11 & 11 & 27 & 95 & \infty & 74 & 68 \\
 67 & 37 & 30 & 44 & 84 & 74 & \infty & 17 \\
 25 & 80 & 56 & 34 & 92 & 68 & 17 & \infty
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

De optimale rondreis heeft lengte z_{TSP}^* .

- (b). Beschrijf de naaste buurheuristiek om een rondreis te construeren. Pas die toe door te beginnen in stad 8 en bereken de bijbehorende lengte $z_{\text{heuristiek}}$. Is $z_{\text{heuristiek}}$ een boven- of een ondergrens van z_{TSP}^* ?
- (c). Beschrijf de verwisselingsheuristiek 2-opt om een gegeven rondreis (eventueel) te verbeteren. Pas die toe door in de rondreis van (a) de twee langste verbindingen te breken.

Opgave 3

We formuleren het handelsreizigersprobleem van opgave 2 als een mathematisch programmeringsprobleem met binaire beslissingsvariabelen, we noemen het IP, en noteren de optimale criteriumwaarde als $z_{\text{IP}}^* = z_{\text{TSP}}^*$:

$$\min \sum_{i,j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (3)$$

$$\text{onder } \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ji} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

$$\sum_{i,j: i,j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1 \quad \text{voor alle } \emptyset \neq S \subsetneq \{1, 2, \dots, n\}, \quad (6)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

- (a). Geef een interpretatie van de beslissingsvariabelen x_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$). Verklaar de restricties (4), (5) en (6). Geef een voorbeeld van een 'oplossing' (x_{ij}) die aan de restricties (4), (5) en (7) voldoet, maar geen handelsreizigersrondreis is. (M.a.w. de restricties (6) zijn nodig.)

- (b). Pas de modelering aan—zó dat het model lineair blijft—voor de volgende gevallen.
- (i) Als in de rondreis stad 2 direct stad 1 opvolgt, dan mag stad 3 niet direct stad 2 opvolgen.
 - (ii) Minstens één van de steden j moet stad $j - 1$ direct opvolgen in de rondreis, waarbij $j = 2, 3, 4, 5$.
 - (iii) Stad 7 moet stad 4 direct opvolgen in de rondreis, tenzij stad 6 stad 3 direct opvolgt.
 - (iv) Als stad 5 de directe opvolger is van stad 8 in de rondreis, of stad 7 is de directe opvolger van stad 2, dan moet stad 1 de directe opvolger zijn van stad 6 en stad 3 de directe opvolger van stad 4.

Opgave 4

We beschouwen weer de oorspronkelijke IP formulering van opgave 3(a), en formuleren twee LP-relaxaties.

LP1 met optimale criteriumwaarde z_{LP1}^* :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_{ij} \\ \text{onder} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ & \sum_{j=1}^n x_{ji} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ & 0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad i, j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

LP2 met optimale criteriumwaarde z_{LP2}^* :

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i,j=1}^n c_{ij}x_{ij} \\ \text{onder} \quad & \sum_{j=1}^n (x_{ij} + x_{ji}) = 2, \quad i = 1, \dots, n \\ & x_{ij} + x_{ji} \leq 1, \quad i, j = 1, \dots, n \\ & 0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad i, j = 1, \dots, n \\ & x_{ij} = 0, \quad \text{als } i > j. \end{aligned}$$

- (a). Laat met voorbeelden zien dat niet elke IP-toegelaten oplossing ook LP2-toegelaten is, en dat niet elke LP2-toegelaten oplossing ook LP1-toegelaten is.
- (b). Toch geldt

$$z_{LP1}^* \leq z_{LP2}^* \leq z_{IP}^*.$$

Gevraagd wordt dit te bewijzen. Hint: stel je hebt een optimale IP-oplossing x_{IP}^* . Laat zien dat je een LP2-toegelaten oplossing x_{LP2} kunt construeren met dezelfde criteriumwaarde als x_{IP}^* . Net zo: stel je hebt een optimale LP2-oplossing x_{LP2}^* . Laat zien dat je een LP1-toegelaten oplossing x_{LP1} kunt construeren met dezelfde criteriumwaarde als x_{LP2}^* . Gebruik het feit dat de afstandstabel symmetrisch is.

- (c). Relaxeer LP1 verder door $0 \leq x_{ij} \leq 1$ te veranderen in $x_{ij} \geq 0$ (geen 1-bovengrens). De rest van LP1 blijft ongewijzigd. Dit nieuwe probleem heet LP3. Bewijs dat

$$z_{LP3}^* = z_{LP1}^*.$$

Hint: toon aan dat elke toegelaten LP1-oplossing ook LP3-toegelaten is, en dat elke toegelaten LP3-oplossing ook LP1-toegelaten is.

Opgave 5

LP3 kunnen we dus formuleren als

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}, \quad (8)$$

waarin de rechterkant $\mathbf{b}$ een vector van alleen 1-en is. De bewering is dat $\mathbf{A}$ in (8) totaal unimodulair is en dat de optimale oplossing geheeltallig is. Om dit te bewijzen, beantwoord de volgende vragen.

- Geef de definitie van een totaal unimodulaire matrix $\mathbf{A}$.
- Formuleer voldoende voorwaarden voor een totaal unimodulaire matrix en laat zien dat de matrix $\mathbf{A}$ in LP3 (8) aan deze voorwaarden voldoet.
- Bewijs dat elke basisoplossing van LP3 (8) geheeltallig is (en in het bijzonder binair).

Opgave 6

In deze opgave lossen we het handelsreizigersprobleem van opgave 2 op door toepassing van *branch & bound* met behulp van de LP-relaxatie LP3.

- Beschrijf de branch & bound methode (of geef een algoritme of illustratie) in de algemene context van een geheeltallig lineair programmeringsprobleem van het type

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ geheel}\}.$$

Hoe ontstaat de *branch & bound* boom?

- Het LP3-probleem van opgave 4(c) hoort bij de *root* van de branch & bound boom: dit geeft de *bound*. Veronderstel dat de optimale oplossing van LP3 is:

$$x_{12} = x_{23} = x_{34} = x_{41} = 1, \quad x_{56} = x_{67} = x_{78} = x_{85} = 1,$$

en alle andere $x_{ij} = 0$. Geef dan aan hoe je de *branch* zou uitvoeren. Beargumenteer je keuze.

- Stel dat je de restrictie $x_{12} = 0$ wil toevoegen aan LP3. Hoe kun je dat nieuwe LP-probleem zo formuleren dat de restrictiematrix totaal unimodulair blijft?

Opgave 7

In deze opgave lossen we het handelsreizigersprobleem van opgave 2 op door toepassing van *cutting planes* op de LP-relaxatie LP2 (zie opgave 4).

- (a). Beschrijf de cutting planes methode in de algemene context van een geheeltallig lineair programmeringsprobleem van het type

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ geheel}\}.$$

Leg daarbij uit wat *valid inequalities* zijn en schets een strategie om die te vinden. Meestal wordt de cutting planes methode gecombineerd met de branch & bound methode. Hoe en waarom?

- (b). Veronderstel dat de optimale oplossing van LP2 is:

$$x_{12} = x_{13} = x_{23} = x_{24} = x_{25} = x_{45} = 0.5, \quad x_{14} = x_{35} = x_{67} = x_{68} = x_{78} = 1,$$

en alle andere $x_{ij} = 0$. Teken deze oplossing en ga na dat die LP2-toegelaten is. Welke valid inequality zou je nu toevoegen aan LP2. Beargumenteer je keuze.