

TENTAMEN MATHEMATISCHE PROGRAMMERING

17 december 2003



Puntentelling

	totaal	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
1	20	3	5	3	4	5	
2	30	3	7	8	4	3	5
3	25	5	5	3	3	6	3
4	25	3	8	8	6		

Opgave 1

Beschouw het lineair programmeringsprobleem in standaardvorm met n beslissingsvariabelen en m restricties:

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}. \quad (\text{LP})$$

(Vectoren en matrices zijn vetgedrukt; vectoren zijn kolomvectoren; superscript T betekent getransponeerde; $m < n$; $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$.)

- (a). Laat $\mathbf{B}$ een deelmatrix zijn van $\mathbf{A}$. Wanneer wordt $\mathbf{B}$ een basis genoemd van probleem (LP)? Wanneer wordt een vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ een basisoplossing (bij een basis $\mathbf{B}$) genoemd van probleem (LP)?
- (b). Formuleer en bewijs de twee condities onder welke een basisoplossing bij basis $\mathbf{B}$ een optimale oplossing is van probleem (LP).

Beschouw het volgende lineair programmeringsprobleem:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \\ \text{onder} \quad & 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 \leq 10 \\ & 4x_1 + 5x_2 + 8x_4 \leq 12 \\ & x_2 - 9x_3 - 6x_4 \geq 5 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned} \quad (\text{LP-prbl})$$

- (c). Breng dit probleem in standaardvorm (LP) en specificeer de matrix $\mathbf{A}$ en de vectoren $\mathbf{b}$ en $\mathbf{c}$.
- (d). Formuleer het duale probleem van probleem (LP-prbl), met variabelen $y_1, y_2, \dots$.
- (e). Als $\mathbf{x}$ een (willekeurige) toegelaten oplossing is van probleem (LP-prbl) met criteriumwaarde $z(\mathbf{x})$, en als $\mathbf{y}$ een (willekeurige) toegelaten oplossing is van het bijbehorende duale probleem met criteriumwaarde $w(\mathbf{y})$, bewijs dan dat

$$w(\mathbf{y}) \leq z(\mathbf{x}).$$

NB: maak geen gebruik van andere dualiteitstellingen.

Opgave 2

Gegeven is het volgende geheeltallige lineair programmeringsprobleem

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{1}, \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \}, \quad (\text{IP})$$

waarin is $\mathbf{A} = (a_{ij})$ een $m \times n$ matrix is bestaande uit 0'en en 1'en, en waarin $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)^T$.

- (a). Onder welke naam staat dit probleem bekend? Beschrijf het probleem in woorden en geef een praktische toepassing.
- (b). Formuleer de LP-relaxatie van probleem (IP). Beschrijf de methode van kolomgeneratie om dit LP probleem op te lossen en geef het bijbehorende stappenplan.
- (c). Beschouw de Lagrange (geheeltallige) relaxatie van probleem (IP) door de restricties $\mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{1}$ te dualiseren:

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} - \mathbf{u}^T (\mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{1}) \mid \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \}, \quad (\text{LR})$$

waarin $\mathbf{u} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$. Schrijf z_{IP}^* voor de optimale criteriumwaarde van (IP), z_{LP}^* voor de optimale criteriumwaarde van de LP-relaxatie, en $z_{\text{LR}}^*(\mathbf{u})$ voor de optimale criteriumwaarde van de Lagrange relaxatie (LR). Bewijs dan de twee ongelijkheden in

$$z_{\text{LP}}^* \leq \max_{\mathbf{u} \geq 0} z_{\text{LR}}^*(\mathbf{u}) \leq z_{\text{IP}}^*.$$

Beschouw nu de volgende instantie van (IP):

$$m = 4, n = 7, \mathbf{c} = (5, 6, 5, 4, 8, 9, 4)^T,$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (d). Vind de optimale oplossing $\mathbf{x}_{\text{LR}}^*(\mathbf{u})$ van het Lagrange probleem (LR) bij $\mathbf{u} = (1, 3, 3, 3)^T$, en bereken de bijbehorende $z_{\text{LR}}^*(\mathbf{u})$.
- (e). Breid $\mathbf{x}_{\text{LR}}^*(\mathbf{u})$ uit tot een toegelaten oplossing $\mathbf{x}$ van het oorspronkelijke probleem (IP) (bij de bovenstaande gegevens), en bereken de bijbehorende criteriumwaarde $z(\mathbf{x})$.
- (f). Welke onder- en bovengrens voor de optimale (en onbekende) criteriumwaarde z_{IP}^* heb je nu gevonden? Misschien geeft een andere $\mathbf{u}$ een betere ondergrens. Beschrijf een methode om numeriek $\max_{\mathbf{u} \geq 0} z_{\text{LR}}^*(\mathbf{u})$ te bepalen. (NB: geef geen bewijzen).

Opgave 3

Beschouw het nietlineaire programmeringsprobleem in algemene vorm:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{onder} \quad & g_i(\mathbf{x}) = b_i \quad i \in \mathcal{E}, \\ & g_i(\mathbf{x}) \geq b_i \quad i \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{NLP}$$

(Hierbij is $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.)

- (a). Geef de bijbehorende Lagrangefunctie met Lagrange multiplicatoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, en formuleer het stelsel van de Kuhn-Tucker eerste order noodzakelijke voorwaarden waaraan een optimale oplossing $\mathbf{x}^*$ van (NLP) moet voldoen (dus zonder de *constraint qualification* voorwaarde).

We beschouwen de volgende instantie van (NLP):

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1 - 6x_2 + 7x_1^2 + 10x_2^2 - 4x_1x_2 \\ \text{onder} \quad & 3x_1 - 4x_2 \geq 9 \\ & x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- (b). Formuleer deze instantie in matrix/vectorvorm als

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}, \tag{QP}$$

waarin $\mathbf{Q}$ een symmetrische 2×2 matrix is. Specificeer de matrices $\mathbf{Q}$, $\mathbf{A}$ en de vectoren $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Onder welke eigenschap van $\mathbf{Q}$ is de criteriumfunctie van probleem (QP) convex? Ga na dat $\mathbf{Q}$ (bij bovenstaande gegevens) aan deze eigenschap voldoet.

- (c). Geef expliciet het stelsel geformuleerd in (a) van de Kuhn-Tucker voorwaarden voor dit probleem. Is dit stelsel eenvoudig of lastig op te lossen? Verklaar je antwoord.

Beschouw nu de volgende instantie van (NLP):

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1^3 - 2x_1^2x_3 + 6x_2^2x_3^2 + 7x_1x_2x_3 + x_2^2 - 5x_1 - 18x_3 \\ \text{onder} \quad & 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 8 \\ & x_1 - 10x_2 + 7x_3 = 2 \end{aligned}$$

Dit probleem willen we oplossen met de *reduced gradient* methode. Daartoe formuleren we het probleem in matrix/vectorvorm als

$$\min \{ f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \}, \tag{NLP-LINEQ}$$

met

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -10 & 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- (d). Een toegelaten oplossing van (NLP-LINEQ) bij de gegeven data is $\bar{\mathbf{x}} = (5, 1, 1)^T$. De nulruimte van matrix $\mathbf{A}$ is een lijn in de $\mathbb{R}^3$ (dus heeft dimensie 1) en wordt opgespannen door de vector $\mathbf{z} = (29, 19, 23)^T$. Herformuleer probleem (NLP-LINEQ) tot een onvoorwaardelijk minimalisatieprobleem van één variabele:

$$\min \{ \phi(v) \mid v \in \mathbb{R} \}. \tag{ONV-MIN}$$

Geef aan hoe je komt tot (voer de berekeningen niet uit):

$$\phi(v) = 74 + 2101v + 37603v^2 + 294662v^3 + 1145814v^4.$$

- (e). In de *reduced gradient* methode wordt vervolgens een betere toegelaten oplossing $\bar{x}'$ van (NLP-LINEQ) geconstrueerd. Beschrijf deze stap. Geef daarbij ook aan wat de *reduced gradient* is.
- (f). Stel dat je het probleem (ONV-MIN) rechtstreeks wilt oplossen (in plaats van de *reduced gradient*). Hoe zou je dit aanpakken? En welk algoritme zou je toepassen?

Opgave 4

Een individu beschikt nu over een bezit X_1 en heeft op elk van de komende N tijdstippen de keuze om een deel van zijn bezit te consumeren en om het restant (deels) te beleggen in risicovolle aandelen. Als deze persoon op het n -de tijdstip X_n bezit, en hij C_n consumeert (waarbij $0 \leq C_n \leq X_n$), dan levert hem dat een nut van $u(C_n)$. Vervolgens geeft een investering van Y_n (waarbij $0 \leq Y_n \leq X_n - C_n$) een rendement Z_n . Het belegde bedrag komt inclusief de eventuele winst (cq. exclusief eventueel verlies) vóór het volgende beslissingstijdstip weer vrij.

- (a). Beredeneer dat het bezit van de consument evolueert volgens de vergelijking
- $$X_{n+1} = X_n - C_n + Z_n Y_n.$$

We veronderstellen dat de rendementen $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$ stochastische variabelen zijn met een discrete waardeverzameling $W_Z \subset \mathbb{R}$. De doelstelling is om zó te consumeren en te beleggen dat het verwachte totale nut $E[\sum_{n=1}^N u(C_n)]$ maximaal is.

- (b). Veronderstel dat de rendementen $Z_1, Z_2, \dots, Z_N$ onafhankelijke en gelijkverdeelde stochastische variabelen zijn met kansdichtheid $f(z) := P(Z = z)$ voor $z \in W_Z$. (Dus $f(z) \geq 0$ en $\sum_z f(z) = 1$.)

Formuleer een stochastisch dynamisch programmeringsmodel voor het vinden van een optimale consumerings- en beleggingsstrategie. Geef duidelijk aan: (i) beslissingstijdstippen, (ii) toestanden, (iii) acties (of beslissingen), (iv) overgangskansen, (v) éénstapsopbrengsten, (vi) waardefuncties, en (vii) de optimaliteitsvergelijkingen. Geef ook aan hoe de optimale acties uit de optimaliteitsvergelijkingen bepaald worden.

- (c). Laat gegeven zijn:

$$N = 3; X_1 = 64; u(c) = \log(c);$$

$$P(Z = -0.5) = 0.25; P(Z = 0) = 0.5; P(Z = 0.5) = 0.25;$$

en beschouw de volgende strategie.

Op tijdstippen 1 en 2: consumeer een kwart van het bezit en beleg de rest; op tijdstip 3: consumeer het hele bezit.

Bereken bij deze strategie het verwachte totale nut. Hint: splits uit naar de realisaties van Z_1 en Z_2 .

- (d). Pas het SDP-model van (b) aan als de rendementen een Markovketen (met eindige toestandsruimte) volgen, d.w.z. veronderstel dat $W_Z = \{z_1, z_2, \dots, z_K\}$, en

$$p_{ij} := P(Z_{n+1} = z_j | Z_n = z_i),$$

waarbij deze (voorwaardelijke) kansen p_{ij} gegeven zijn en voldoen aan $p_{ij} \geq 0$ en $\sum_j p_{ij} = 1$ voor alle i .