



Opgave 1

- (a). B is een basis als B bestaat uit precies m lineair onafhankelijke kolommen van A . Laat R de overige kolommen van A zijn. Een vector $x \in \mathbb{R}^n$ is een basisoplossing (bij basis B) als zijn coördinaten worden gesplitst in (x_B, x_R) , overeenkomstig de kolommen van respectievelijk B en R , zodat $x_B = B^{-1}b$ en $x_R = 0$.
- (b). De twee condities. C1: $B^{-1}b \geq 0$; C2: $c_R^T - c_B^T B^{-1}R \geq 0$.
Bewijs van C1 is duidelijk want dan voldoet de basisoplossing $\bar{x} := (\bar{x}_B = B^{-1}b, \bar{x}_R = 0)$ aan (i) $A\bar{x} = b$ en (ii) $\bar{x} \geq 0$. Ofwel, $\bar{x}$ is toegelaten.
C2 zorgt voor optimaliteit, namelijk de criteriumwaarde $z(x)$ van een willekeurige toegelaten oplossing x voldoet dan aan $z(x) \geq z(\bar{x})$. Alsvolgt.
Schrijf weer $x = (x_B, x_R)$; dan

$$Ax = b \Leftrightarrow Bx_B + Rx_R = b \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R.$$

Substitueer dit in de criteriumwaarde:

$$z(x) = c^T x = c_B^T x_B + c_R^T x_R = c_B^T B^{-1}b + (c_R^T - c_B^T B^{-1}R)x_R.$$

Dus als $x_R \geq 0$ en C2, dan is $z(x) \geq c_B^T B^{-1}b = z(\bar{x})$.

- (c). De standaardvorm is

$$\begin{array}{ll} \min & 5x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 \\ \text{onder} & 2x_1 - 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 + x_5 = 10 \\ & 4x_1 + 5x_2 + 8x_4 + x_6 = 12 \\ & x_2 - 9x_3 - 6x_4 - x_7 = 5 \\ & x_1, \dots, x_7 \geq 0. \end{array}$$

Dus

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & -3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -6 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \quad c = (5, 3, -6, -1, 0, 0, 0)^T.$$

- (d). Het duale probleem is $\max\{y^T b \mid y^T A \leq c^T\}$. Uitwerken:

$$\begin{array}{ll} \max & 10y_1 + 12y_2 + 5y_3 \\ \text{onder} & 2y_1 + 4y_2 \leq 5 \\ & -7y_1 + 5y_2 + y_3 \leq 3 \\ & -3y_1 - 9y_3 \leq -6 \\ & 5y_1 + 8y_2 - 6y_3 \leq -1 \\ & y_1 \leq 0 \\ & y_2 \leq 0 \\ & y_3 \geq 0 \end{array}$$

- (e). Maak gebruik van $w(y) = y^T b$, $z(x) = c^T x$, $Ax = b$, $y^T A \leq c^T$ en $x \geq 0$:

$$w(y) = y^T b = y^T (Ax) = (y^T A)x \leq c^T x = z(x).$$

Opgave 2

- (a). Set-covering probleem. Hoe tegen minimale kosten kolommen kiezen zodat alle rijen overdekt worden. Hierbij is c_j de kosten van kolom j , en $a_{ij} = 1$ als rij i door kolom j overdekt wordt. Toepassingen: routing, roosteren.
- (b). LP-relaxatie: $\min\{c^T x \mid Ax \geq 1, 0 \leq x \leq 1\}$.
 Kolomgeneratie: Stel $m \ll n$. Dan kiezen we een deelmatrix D bestaande uit d kolommen van A , waarbij $m \leq d \ll n$, en zodat $\text{rang}(D) = m$. Dan lossen we het gereduceerde LP-probleem $\min\{c_D^T x_D \mid Dx_D \geq 1, 0 \leq x_D \leq 1\}$ op met behulp van de herziene simplex methode. Zeg B is de gevonden optimale basis van het gereduceerde probleem. Merk op dat B een deelmatrix is van m onafhankelijke kolommen van D , en dus ook van A . Volgens opgave 1 voldoet B aan de C1 en C2 condities van het gereduceerde probleem. Nu gaan we na of B ook aan de C1 en C2 condities van het oorspronkelijke probleem voldoet. C1 is vervuld. C2 zegt dat de gereduceerde kosten van alle kolommen van A nietnegatief moeten zijn. Dit wordt nagegaan met behulp van de duale variabelen behorende bij de optimale oplossing van het gereduceerde probleem (namelijk $y^T = c_B^T B^{-1}$). Immers de gereduceerde kosten zijn $c^T - y^T A$. Zo gauw we één of meer kolommen van A gevonden hebben met negatieve gereduceerde kosten weten we dat we nog geen optimale oplossing van het oorspronkelijke probleem hebben. Deze kolommen voegen we toe aan D en herhalen dit proces.
- (c). Voor $u \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ is

$$\begin{aligned} z_{\text{IP}}^* &= \min \{c^T x \mid Ax \geq 1, x \in \{0, 1\}^n\} \\ &\geq \min \{c^T x - u^T (Ax - 1) \mid Ax \geq 1, x \in \{0, 1\}^n\} \\ &\geq \min \{c^T x - u^T (Ax - 1) \mid x \in \{0, 1\}^n\} = z_{\text{LR}}^*(u) \end{aligned}$$

Dus ook $z_{\text{IP}}^* \geq \max_{u \geq 0} z_{\text{LR}}^*(u)$.
 De ander ongelijkheid volgt uit

$$\begin{aligned} \max_{u \geq 0} z_{\text{LR}}^*(u) &= \max_{u \geq 0} \left[\min \{c^T x - u^T (Ax - 1) \mid x \in \{0, 1\}^n\} \right] \\ &\geq \max_{u \geq 0} \left[\min \{c^T x - u^T (Ax - 1) \mid 0 \leq x \leq 1\} \right] \\ &= \max_{u \geq 0} \left[u^T \mathbf{1} + \underbrace{\min \{(c^T - u^T A)x \mid x \leq 1, x \geq 0\}}_{\text{dualiseren}} \right] \\ &= \max_{u \geq 0} \left[u^T \mathbf{1} + \max \{v^T \mathbf{1} \mid v^T \leq c^T - u^T A, v \leq 0\} \right] \\ &= \max \{u^T \mathbf{1} + v^T \mathbf{1} \mid v^T + u^T A \leq c^T, u \geq 0, v \leq 0\} \\ &= \max \left\{ \underbrace{u^T \mathbf{1} - v^T \mathbf{1}}_{\text{dualiseren}} \mid u^T A - v^T \leq c^T, u \geq 0, v \geq 0 \right\} \\ &= \min \{c^T x \mid Ax \geq 1, x \leq 1, x \geq 0\} = z_{\text{LP}}^* \end{aligned}$$

- (d). Werk de criteriumfunctie van het Lagrange probleem uit:

$$c^T x - u^T (Ax - 1) = u^T \mathbf{1} + \tilde{c}^T x,$$

waarin $u^T \mathbf{1} = \sum_i u_i = 10$ en

$$\begin{aligned} \tilde{c}^T &= c^T - u^T A \\ &= (5, 6, 5, 4, 8, 9, 4)^T - (1, 3, 3, 3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (5, 6, 5, 4, 8, 9, 4)^T - (6, 0, 4, 3, 4, 7, 6)^T = (-1, 6, 1, 1, 4, 2, -2)^T. \end{aligned}$$

Dus het Lagrange-probleem luidt:

$$\min \{10 - x_1 + 6x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 - 2x_7 \mid x_j \in \{0, 1\}\}.$$

Direct duidelijk is dat de optimale oplossing is $\mathbf{x}_{\text{LR}}^*(\mathbf{u}) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$ met $z_{\text{LR}}^*(\mathbf{u}) = 10 - 1 - 2 = 7$.

- (e). De oplossing van (d) bedekt de rijen 2,3 en 4: $\mathbf{Ax}_{\text{LR}}^*(\mathbf{u}) = (0, 1, 2, 1)^T$. Dus nog rij 1 bedekken. Dat kan door kolom 3,5 of 6 met kosten respectievelijk 5,8 en 9. Dus we kiezen kolom 3 en breiden $\mathbf{x}_{\text{LR}}^*(\mathbf{u})$ uit tot de toegelaten oplossing $\mathbf{x} = (1, 0, 1, 0, 0, 0, 1)^T$ met bijborende criteriumwaarde $z(\mathbf{x}) = c_1 + c_3 + c_7 = 5 + 5 + 4 = 14$.

- (f). Gevonden: $7 \leq z_{\text{IP}}^* \leq 14$.

Het probleem $\max_{\mathbf{u} \geq 0} z_{\text{LR}}^*(\mathbf{u})$ wordt numeriek aangepakt door de subgradientmethode. Dat is een iteratieve methode met iteratieformule voor de i -de coördinaat van $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}_i^{(k+1)} = \max\{0, \mathbf{u}_i^{(k)} + t_k \mathbf{s}_i^{(k)}\},$$

waarin t_k de scalaire stapgrootte is, en $\mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{1} - \mathbf{Ax}_{\text{LR}}^*(\mathbf{u}^{(k)})$ de subgradient bij de optimale oplossing van het Lagrange-probleem bij $\mathbf{u}^{(k)}$. De stapgroottes worden zo gekozen dat $t_k \rightarrow 0$ en $\sum_{i=1}^k t_i \rightarrow \infty$ (als $k \rightarrow \infty$).

Opgave 3

- (a). De Lagrangefunctie is $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i (g_i(\mathbf{x}) - b_i)$, waarbij verondersteld is dat $|\mathcal{E}| + |\mathcal{I}| = m$. De eerste order noodzakelijke Kuhn-Tucker voorwaarden luiden: als $\mathbf{x}$ optimaal is dan zijn er multiplicatoren $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ zodat

- (i) $\lambda_i \geq 0, \quad i \in \mathcal{I}$
- (ii) $g_i(\mathbf{x}) = b_i, \quad i \in \mathcal{E},$
- (iii) $g_i(\mathbf{x}) \geq b_i, \quad i \in \mathcal{I}$
- (iv) $\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{0}$
- (v) $\lambda_i (g_i(\mathbf{x}) - b_i) = 0, \quad i \in \mathcal{I}$

NB: hierbij wordt verondersteld dat de *constraint qualification* is vervuld in $\mathbf{x}$.

- (b).

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

De criteriumfunctie is convex als de matrix $\mathbf{Q}$ symmetrisch en positief semidefinit is. Direct is te zien dat symmetrie is vervuld. Positief semidefinit wil zeggen dat $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \geq 0$ voor alle vectoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Dat is te controleren door na te gaan of alle eigenwaarden van $\mathbf{Q}$ nietnegatief zijn. Na enige calculus krijgen we

$$\det(\mathbf{Q} - \alpha \mathbf{I}) = (\alpha - 6)(\alpha - 11).$$

Dus de eigenwaarden zijn 6 en 11, allebei positief, dus $\mathbf{Q}$ is positief definit.

- (c). De Lagrangefunctie is

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = 4x_1 - 6x_2 + 7x_1^2 + 10x_2^2 - 4x_1x_2 - \lambda_1(3x_1 - 4x_2 - 9) - \lambda_2(x_1 + 2x_2 - 5) - \lambda_3x_1 - \lambda_4x_2.$$

$\mathbf{x}$ is optimaal als $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ voldoen aan

- (i) $\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$
- (iii) $3x_1 - 4x_2 \geq 9$
 $x_1 + 2x_2 \geq 5$
 $x_1 \geq 0$
 $x_2 \geq 0$
- (iv) $4 + 14x_1 - 4x_2 - 3\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0$
 $-6 + 20x_2 - 4x_1 + 4\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_4 = 0$
- (v) $\lambda_1(3x_1 - 4x_2 - 9) = 0$
 $\lambda_2(x_1 + 2x_2 - 5) = 0$
 $\lambda_3x_1 = 0$
 $\lambda_4x_2 = 0$

Dit is een nietlineair stelsel (in de ‘onbekenden’ $x_1, x_2, \lambda_1, \dots, \lambda_4$) dus meestal niet eenvoudig op te lossen.

- (d). $\bar{x} = (5, 1, 1)^T$ is een toegelaten oplossing, dus voldoet aan $A\bar{x} = b$. Een willekeurige toegelaten oplossing kun je schrijven als $x = \bar{x} + p$, waarbij, omdat ook $Ax = b$, moet gelden $Ap = 0$. Dit zegt dat p in de nulruimte $\mathcal{N}(A)$ moet liggen. Gegeven is dat elke vector in de nulruimte te schrijven is als vz met v scalair en $z = (29, 19, 23)^T$. Kortom, het toegelaten gebied mogen we herformuleren door

$$\{x : Ax = b\} = \{\bar{x} + p : p \in \mathcal{N}(A)\} = \{\bar{x} + vz : v \in \mathbb{R}\}.$$

Dus het NLP mogen we herformuleren door:

$$\min\{f(x) | Ax = b\} = \min\{f(\bar{x} + vz) | v \in \mathbb{R}\}.$$

Door nu $\phi(v) := f(\bar{x} + vz)$ te noemen, de gegeven $\bar{x}$ en z te substitueren en f uit te rekenen, kom je tot het onvoorwaardelijke één-dimensionale probleem.

- (e). Veronderstel dat $\bar{v}$ een oplossing is van $\min\{\phi(v) : v \in \mathbb{R}\}$, dan creëren we een nieuwe toegelaten oplossing van het oorspronkelijke NLP probleem door $\bar{x}' := \bar{x} + \bar{v}z$. En kunnen we (d) en (e) herhalen.

Een noodzakelijke voorwaarde van een oplossing van het probleem $\min\{\phi(v) : v \in \mathbb{R}\}$ is de eerste order voorwaarde $\phi'(v) = 0$. In plaats hiervan lossen we de eerste order voorwaarde van de kwadratische benadering van ϕ op. Laat $\hat{\phi}(v) = \phi(0) + \phi'(0)v + \frac{1}{2}\phi''(0)v^2$, en los op (naar v):

$$\hat{\phi}'(v) = 0 \Leftrightarrow \phi'(0) + \phi''(0)v = 0,$$

en noem deze oplossing $\bar{v}$. Calculus geeft dat

$$\phi'(0) = \frac{\partial}{\partial v} f(\bar{x} + vz) \Big|_{v=0} = z^T \nabla_x f(\bar{x}), \quad \text{de reduced gradient},$$

en analoog

$$\phi''(0) = \frac{\partial^2}{\partial v^2} f(\bar{x} + vz) \Big|_{v=0} = z^T \nabla_x^2 f(\bar{x}) z, \quad \text{de reduced Hessiaan}.$$

- (f). Uit (e) volgt dat we de eerste order voorwaarde $\phi'(v) = 0$ zouden kunnen oplossen. Dit is het vinden van een nulpunt van een (univariate) functie en zou met een numerieke procedure zoals bisectie kunnen geschieden.

Opgave 4

- (a). Na consumptie van C_n blijft nog $X_n - C_n$ over. Hiervan wordt Y_n belegd. Stel dat deze belegging na één periode als T_n wordt uitgekeerd inclusief winst (of verlies), dan is dus $X_{n+1} = X_n - C_n - Y_n + T_n$. Het rendement van de belegging Y_n is dan

$$Z_n = \frac{T_n - Y_n}{Y_n} \Leftrightarrow T_n = Y_n + Z_n Y_n \Rightarrow X_{n+1} = X_n - C_n + Z_n Y_n.$$

- (b). (i) beslissingstijdstippen: $n = 1, 2, \dots, N$ de gegeven tijdstippen, steeds vlak voor de keuze van hoeveel te consumeren en te beleggen;
(ii) toestanden: X_n het bezit op tijdstip n ;
(iii) acties (of beslissingen): (C_n, Y_n) hoeveel te consumeren (C_n) en te beleggen (Y_n). Als de toestand $X_n = x$ is, dan zijn toegelaten $0 \leq C_n \leq x$ en $0 \leq Y_n \leq x - C_n$;
(iv) overgangskansen: als de toestand $X_n = x$ is en de beslissing $C_n = c, Y_n = y$, dan

$$P(X_{n+1} = x - c + zy | X_n = x, C_n = c, Y_n = y) = P(Z = z) = f(z), \quad z \in W_Z,$$

en $P(X_{n+1} = x' | X_n = x, C_n = c, Y_n = y) = 0$ als x' niet van deze vorm is;

- (v) éénstapsopbrengsten: als de toestand $X_n = x$ is en de beslissing $C_n = c, Y_n = y$, dan is $r_n(x, c, y) = u(c)$;

- (vi) waardefuncties: $f_n(x)$ is het maximale verwachte totale nut over de tijdstippen $n, n+1, \dots, N$ als gegeven is dat op tijdstip n de toestand x is;
- (vii) de optimaliteitsvergelijkingen: $f_{N+1} \equiv 0$, en achtereenvolgens voor $n = N, N-1, \dots, 1$ en alle mogelijke toestanden $X_n = x$:

$$f_n(x) = \max_{c,y} \left\{ u(c) + \sum_{z \in W_Z} P(Z=z) f_{n+1}(x - c + zy) \right\}.$$

De optimale strategie wordt precies gegeven door de optimaliserende acties (c^*, y^*) van deze vergelijkingen.

- (c). Veronderstel realisaties $Z_1 = 0$ en $Z_2 = 0.5$. Dan zijn de achtereenvolgende toestanden, consumpties en beleggingen:

$$\text{tijdstip 1 : } X_1 = 64, C_1 = 0.25 \times 64 = 16, Y_1 = 64 - 16 = 48$$

$$\text{tijdstip 2 : } X_2 = 64 - 16 + 0 = 48, C_2 = 0.25 \times 48 = 12, Y_2 = 48 - 12 = 36$$

$$\text{tijdstip 3 : } X_3 = 48 - 12 + 0.5 \times 36 = 54, C_3 = 54, Y_3 = 0$$

Het bijbehorende totale nut is $\log(16) + \log(12) + \log(54) = \log(10368) = 9.2465$ dat verkregen wordt met kans $P(Z_1 = 0) \times P(Z_2 = 0.5) = 0.5 \times 0.25 = 0.125$. Zo stellen we de volgende tabel op door alle 9 mogelijkheden uit te werken.

Z_1	Z_2	X_2	C_2	X_3	kans p_i	nut u_i
-0.5	-0.5	24	6	9	0.0625	$\log(16 \times 6 \times 9) =$
-0.5	0.0	24	6	18	0.125	$\log(16 \times 6 \times 18) =$
-0.5	0.5	24	6	27	0.0625	$\log(16 \times 6 \times 27) =$
0.0	-0.5	48	12	18	0.125	$\log(16 \times 12 \times 18) =$
0.0	0.0	48	12	36	0.25	$\log(16 \times 12 \times 36) =$
0.0	0.5	48	12	54	0.125	$\log(16 \times 12 \times 54) =$
0.5	-0.5	72	18	27	0.0625	$\log(16 \times 18 \times 27) =$
0.5	0.0	72	18	54	0.125	$\log(16 \times 18 \times 54) =$
0.5	0.5	72	18	81	0.0625	$\log(16 \times 18 \times 81) =$

Verwachte totale nut is $\sum_{i=1}^9 p_i u_i =$.

- (d). De toestand wordt aangepast door ook informatie van de laatste realisering van het rendement toe te voegen: (X_n, Z_{n-1}) . Daardoor veranderen de overgangskansen:

$$P(X_{n+1} = x', Z_n = z_j | X_n = x, Z_{n-1} = z_i, C_n = c, Y_n = y) = \begin{cases} p_{ij} & \text{als } x' = x - c + z_j y, \\ 0 & \text{anders.} \end{cases}$$

De recursievergelijkingen vande waardefuncties worden

$$f_n(x, z_i) = \max_{c,y} \left\{ u(c) + \sum_{j=1}^K p_{ij} f_{n+1}(x - c + z_j y, z_j) \right\}.$$