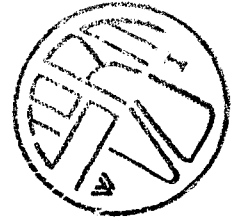


TENTAMEN MATHEMATISCHE PROGRAMMERING

27 maart 2003

Puntentelling

	totaal	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)
1	30	2	2	2	10	6	2	2	2	2
2	20	5	10	5						
3	25	4	4	4	4	5	4	(9)		
4	25	2	2	3	4	2	3	6	3	



Opgave 1

Beschouw het volgende optimaliseringsprobleem. Het probleem is te beslissen over een voorraad/productieplan voor n perioden van één enkel product. Zowel productie als vraag naar dit product geschiedt alleen in hele eenheden. De data zijn:

- f_t zijn de vaste productiekosten in periode t (ook wel *set up* kosten genoemd);
- p_t zijn de productiekosten per eenheid product (p.e.p) in periode t ;
- h_t zijn de opslagkosten p.e.p. aan het eind van periode t ;
- d_t is de vraag (aantal eenheden van het product) in periode t .

Doel is de kosten te minimaliseren onder de restrictie dat aan de vraag (in elke periode) wordt voldaan. Er mag op 'voorraad worden geproduceerd', dat wil zeggen, eenheden produceren in een periode i voor de vraag in een latere periode t .

Om dit probleem op te lossen wordt een geheeltallig lineair programmeringsprobleem van de volgende vorm opgesteld (en genoteerd als IP1). De M in de restricties (3) is een zeer groot getal.

$$\min \sum_{t=1}^n p_t x_t + \sum_{t=1}^n h_t s_t + \sum_{t=1}^n f_t y_t \quad (1)$$

$$\text{onder } s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$$x_t \leq M y_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

$$s_0 = 0, s_t \geq 0 \text{ geheel}, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

$$x_t \geq 0 \text{ geheel}, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$y_t \in \{0, 1\}, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

- Interpreteer de beslissingsvariabelen in (4), (5) en (6).
- Interpreteer de drie sommen in de criteriumfunctie (1).
- Verklaar de restricties (2) en (3).
- Pas de modellering van IP1 aan (zó dat het model lineair blijft!) voor de volgende gevallen.
 - Er moet in minstens drie perioden geproduceerd worden.

- (ii) Als er geproduceerd wordt in periode 2, dan mag er niet geproduceerd worden in perioden 3 en 4.
 - (iii) Er mag niet in periode 5 geproduceerd worden, tenzij er in periode 6 of 7 geproduceerd wordt.
 - (iv) Als er geproduceerd wordt in periode 9 dan moet de productiegrootte (in periode 9) minstens 20 eenheden zijn.
 - (v) Als er geproduceerd wordt in in periode 10 dan mag de productiegrootte in periode 11 niet meer dan 30 eenheden zijn.
- (e). We beschouwen weer het oorspronkelijk IP1 zonder deze extra eisen. Maar nu willen we meer informatie uit de oplossing hebben. Specifiek, we willen weten: als er op voorraad geproduceerd wordt, voor de vraag in welke periode dat bedoeld is. Introduceer daartoe beslissingsvariabelen w_{it} voor $i < t$: het aantal eenheden te produceren in periode i voor de vraag van periode t .
- (i) Welke relatie is er tussen x_i en de w_{it} 's?
 - (ii) Welke relatie is er tussen w_{it} en d_t ?
 - (iii) Formuleer nu een geheeltallig lineair programmeringsprobleem (IP2) dat een optimaal productieplan geeft met de bedoelde informatie.
- (f). Beschouw nu de LP-relaxaties van IP1 en IP2: LP1 en LP2. Geef de toegelaten gebieden Ω_{LP1} en Ω_{LP2} van LP1 respectievelijk LP2, als verzamelingen (in een meerdimensionale ruimte) die bepaald worden door lineaire restricties.
- (g). Laat zien dat $\Omega_{LP2} \subset \Omega_{LP1}$. Dat wil zeggen, uit elke toegelaten oplossing van LP2 wordt een toegelaten oplossing van LP1 geconstrueerd (gebruik (e)(i)).
- (h). Veronderstel $n = 4$, $\mathbf{d} = (12, 17, 10, 8)$, $M = 100$. Geef daarbij een voorbeeld van een toegelaten oplossing van LP1 die niet toegelaten is voor LP2.
- (i). Concludeer welke modellering IP1 of IP2 de voorkeur geniet en beargumenteer waarom.

Opgave 2

We beschouwen hier de IP1-formulering (1)–(6) van het n -perioden voorraad/productie-probleem van opgave 1. Laat de volgende instantie gegeven: $n = 5$ perioden, en de volgende kosten- en vraagvectoren:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 21 \\ 16 \\ 15 \\ 18 \\ 25 \end{pmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 5 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

En $M = 100$ is het grote getal. De optimale criteriumwaarde is z_{IP1}^* .

- (a). De LP relaxatie LP1 van IP1 geeft een ondergrens $LB = z_{LP1}^* = 145.57$. Hoe kun je een bovengrens vinden van z_{IP1}^* ? Bereken een bovengrens UB.

- (b). We gaan de ondergrens LB verbeteren door de methode van *cutting planes* toe te passen. Leg in een algemene context deze methode uit, definieer daarbij het begrip *valid inequality*, licht toe waarom bij juiste toepassing de ondergrens verbeterd wordt, en schets twee strategieën om *valid inequalities* te vinden.
- (c). Leid de volgende *valid inequalities* af:

$$\sum_{i=1}^t y_i \geq \left\lceil \frac{1}{M} \sum_{i=1}^t d_i \right\rceil, \quad t = 1, 2, \dots, 5,$$

waarin $\lceil a \rceil$ het kleinste gehele getal is dat groter of gelijk is aan $a \in \mathbb{R}$.

Opgave 3

We beschouwen weer de IP1-formulering (1)–(6) van het n -perioden voorraad/productieprobleem van opgave 1, maar nu zonder *set up* kosten: $f_t = 0$ in alle perioden. Dan zijn de beslissingsvariabelen y_t niet meer nodig en mogen ook de restricties (3) weggelaten worden. Verder beschouwen we weer de instantie van opgave 2 (maar zonder de $\mathbf{f}$ vector).

- (a). Formuleer dit probleem nu als een geheeltallig minimum-kosten stroomprobleem op een gericht netwerk $G = (V, \mathcal{A})$:

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \text{ geheel} \}. \quad (\text{IP-MKSP})$$

Specificeer matrix $\mathbf{A}$ en de vectoren $\mathbf{c}$ en $\mathbf{b}$. Teken het netwerk G .

- (b). De matrix $\mathbf{A}$ is totaal unimodulair.
- (i) Geef de definitie van een totaal unimodulaire matrix.
 - (ii) Formuleer voldoende voorwaarden volgens welke een matrix totaal unimodulair is.
 - (iii) Pas die toe op $\mathbf{A}$ van (a).
- (c). Beschouw nu de LP-relaxatie van IP-MKSP:

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}. \quad (\text{LP-MKSP})$$

Bewijs dat elke basisoplossing van LP-MKSP geheeltallig is.

- (d). Formuleer de twee noodzakelijke voorwaarden voor een optimale basisoplossing van LP-MKSP.

Je kiest nu of je (e) én (f) doet (geen (g)), of alleen (g) (geen (e) en (f)).

- (e). Construeer in G de opspannende boom T behorende bij het productieschema

produceer in periode 1 de vraag voor alle vijf perioden.

Bereken de bijbehorende basisoplossing $\mathbf{x}$ van LP-MKSP, bereken de bijbehorende duale variabelen $\mathbf{y}$, en laat zien dat deze basisoplossing aan één van de optimaliteitsvoorwaarden van (d) niet voldoet.

- (f). Construeer vervolgens een nieuwe opspannende boom T' in G die slechts één tak verschilt met T van (e), maar zó dat de bijbehorende basisoplossing $\mathbf{x}'$ van LP-MKSP een betere oplossing is dan $\mathbf{x}$ van (e).
- (g). Beschrijf het netwerk simplex algoritme voor een algemeen minimaal-kosten stroomprobleem en geef een stappenplan van het algoritme.

Opgave 4

Beschouw het nietlineaire programmeringsprobleem in algemene vorm:

$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{onder} \quad & g_i(\mathbf{x}) = b_i \quad i \in \mathcal{E}, \\ & g_i(\mathbf{x}) \geq b_i \quad i \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{NLP}$$

(Hierbij is $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.)

- (a). Geef de definitie van convexiteit van de criteriumfunctie f .
- (b). Hoe luiden de Kunh-Tucker eerste order noodzakelijke voorwaarden waaraan een optimale oplossing $\mathbf{x}^*$ van NLP moet voldoen?

We beschouwen de volgende instantie van NLP:

$$n = 2, \mathcal{E} = \emptyset, |\mathcal{I}| = 4,$$

met

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= 12x_1 - 27x_2 + 7x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 \\ g_1(\mathbf{x}) &= 17x_1 - 5x_2 \\ g_2(\mathbf{x}) &= 2x_1 + 6x_2 \\ g_3(\mathbf{x}) &= x_1 \\ g_4(\mathbf{x}) &= x_2 \end{aligned}$$

en

$$\mathbf{b} = (10, 20, 0, 0)^T.$$

- (c). Formuleer deze instantie in matrix/vectorvorm als

$$\min \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} \mid \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}, \tag{QP}$$

waarin $\mathbf{Q}$ een symmetrische 2×2 matrix is. Specificeer de matrices $\mathbf{Q}$, $\mathbf{A}$ en de vector $\mathbf{c}$.

- (d). Onder welke voorwaarde van $\mathbf{Q}$ is de criteriumfunctie van probleem QP convex? Ga na dat $\mathbf{Q}$ (bij bovenstaande gegevens) aan deze voorwaarde voldoet.
- (e). Werk de Kuhn-Tucker voorwaarden van (b) uit voor dit probleem.

Beschouw nu de volgende instantie van NLP:

$$n = 3, \mathcal{I} = \emptyset, |\mathcal{E}| = 2,$$

met

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= x_1^2 x_2 + 5x_1 x_2 x_3 - 6x_2^3 + 19x_2^2 x_3^2 \\g_1(\mathbf{x}) &= x_1 + 5x_2 + x_3 \\g_2(\mathbf{x}) &= 3x_1 - 15x_2 - 12x_3\end{aligned}$$

en

$$\mathbf{b} = (6, 3)^T.$$

Dit probleem willen we oplossen met de *reduced gradient* methode. Daartoe formuleren we het probleem in matrix/vectorvorm als

$$\min \{f(\mathbf{x}) | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}, \quad (\text{NLP-LINEQ})$$

met

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & -15 & -12 \end{pmatrix}$$

- (f). Een toegelaten oplossing van NLP-LINEQ bij de gegeven data is $\bar{\mathbf{x}} = (8, -1, 3)^T$. De nulruimte van matrix $\mathbf{A}$ is een lijn in de $\mathbb{R}^3$ (dus heeft dimensie 1) en wordt opgespannen door de vector $\mathbf{z} = (3, -1, 2)^T$. Herformuleer probleem NLP-LINEQ tot een onvoorwaardelijk minimalisatieprobleem van één variabele:

$$\min \{\phi(v) | v \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{ONV-MIN})$$

Geef aan hoe je komt tot

$$\phi(v) = 76v^4 + 347v^3 + 509v^2 + 231v - 7.$$

(Voer de berekeningen niet uit.)

- (g). In de *reduced gradient* methode wordt vervolgens een betere toegelaten oplossing $\bar{\mathbf{x}}'$ van NLP-LINEQ geconstrueerd. Beschrijf deze stap. Geef daarbij ook aan wat de *reduced gradient* is.
- (h). Stel dat je het probleem ONV-MIN rechtstreeks wilt oplossen (in plaats van de *reduced gradient*). Hoe zou je dit aanpakken? En welk algoritme zou je toepassen?