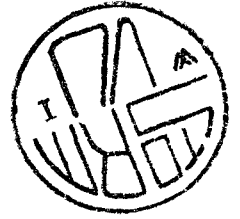


TENTAMEN MATHEMATISCHE PROGRAMMERING

18 december 2002



Puntentelling

	totaal	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
1	25	2	2	2	5	2	5	2	5
2	25	2	2	8	4	4	5		
3	30	2	8	2	8	3	4	3	
4	20	8	8	4					

Opgave 1

Beschouw een lineair programmeringsprobleem (LP) met n beslissingsvariabelen in de volgende vorm:

$$\min \{z(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in L \cap N\}. \quad (1)$$

Hierin is de criteriumfunctie $z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$, en de verzamelingen $L \subset \mathbb{R}^n$ en $N \subset \mathbb{R}^n$ zijn

$$L = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\}, \quad N = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}.$$

Hierin zijn de vectoren $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \geq \mathbf{0}$, en de matrix $\mathbf{A}$ is $m \times n$ met $m < n$ en $\text{rang}(\mathbf{A}) = m$.

Laat $\mathbf{B}$ een $m \times k$ deelmatrix zijn van $\mathbf{A}$ bestaande uit k kolommen, zeg $\{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$. Noem $\mathbf{R}$ de overige kolommen van $\mathbf{A}$.

- Wanneer is $\mathbf{B}$ een basis van het LP (1)?
- Schrijf $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_R)$ en $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_B, \mathbf{c}_R)$. Hoe zijn de vectoren $\mathbf{x}_B, \mathbf{x}_R, \mathbf{c}_B, \mathbf{c}_R$ gedefinieerd?
- Laat $\mathbf{B}$ een basis zijn van het LP. Schrijf dan een willekeurige vector $\mathbf{x} \in L$ in de bijbehorende basisvorm. Wanneer is $\mathbf{x} \in L$ de basisoplossing bij $\mathbf{B}$?
- Laat $\mathbf{B}$ een basis zijn van het LP (1) en $\mathbf{x} \in L$ de bijbehorende basisoplossing. Bewijs:
 - $\mathbf{x} \in N$ dan en slechts dan als $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$.
 - $z(\mathbf{x}) \leq z(\tilde{\mathbf{x}})$ voor elke $\tilde{\mathbf{x}} \in L \cap N$ dan en slechts dan als $\mathbf{c}_R^T - \mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{R} \geq \mathbf{0}$.

We noemen het probleem (1) het primale LP. Het duale LP heeft de vorm

$$\max \{w(\mathbf{y}) | \mathbf{y} \in Y\}. \quad (2)$$

- Geef de criteriumfunctie $w(\mathbf{y})$ en de verzameling Y van de restricties.
- Bewijs dat voor elke $\mathbf{x} \in L \cap N$ (primaal toegelaten oplossing) en $\mathbf{y} \in Y$ (duaal toegelaten oplossing) geldt dat $w(\mathbf{y}) \leq z(\mathbf{x})$. (Maak geen gebruik van andere dualiteitstellingen).
- Laat weer $\mathbf{B}$ een basis zijn van het primale LP (1) en $\mathbf{x} \in L$ de bijbehorende basisoplossing. Als de basis $\mathbf{B}$ voldoet aan de conditie in (d)(i) dan is $\mathbf{x}$ een primaal toegelaten basisoplossing. Waarom wordt $\mathbf{x}$ een duaal toegelaten basisoplossing genoemd als $\mathbf{B}$ voldoet aan de conditie (d)(ii)?

- (h). Veronderstel dat in de situatie van (g) $\mathbf{x}$ niet primaal maar wel een duaal toegelaten basisoplossing is. Uit welke onderdelen bestaat dan de volgende iteratie van het duale simplex-algoritme om een volgende basisoplossing te krijgen? Is de nieuwe basisoplossing primaal of duaal toegelaten? Wanneer is de nieuwe basisoplossing optimaal? En voor welk probleem is die dan optimaal, de primale of de duale?

Opgave 2

Beschouw het volgende optimaliseringsprobleem. Gegeven is een verzameling mogelijke depots $N = \{1, 2, \dots, n\}$ en een verzameling klanten $M = \{1, 2, \dots, m\}$ die goederen vragen welke geleverd worden vanuit de depots. Veronderstel dat er vaste kosten f_j geassocieerd zijn met het gebruik van depot j , en transportkosten c_{ij} als de order van klant i in zijn geheel geleverd wordt vanuit depot j . Het probleem is om te bepalen welke depots te gaan gebruiken, en vanuit welk van deze depots de goederen naar de klanten te leveren, zodat de som van de vaste kosten en transportkosten minimaal is. Dit leidt tot het volgende geheeltallig lineair programmeringsprobleem, genoteerd als BIP.

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n f_j y_j$$

onder $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$ (3)

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq m y_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$
 (4)

$$x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$
 (5)

- (a). Interpreteer de beslissingsvariabelen in (5).
- (b). Verklaar de restricties (3) en (4).
- (c). Pas de modellering van BIP aan (zó dat het model lineair blijft!) voor de volgende gevallen.
- (i) Er mogen hoogstens vijf depots gebruikt worden.
 - (ii) Als depot 2 en 5 gebruikt worden, dan mag depot 4 niet gebruikt worden.
 - (iii) Als depot 3 levert aan klant 4, dan mag depot 3 niet leveren aan klanten 1, 2 en 3.
 - (iv) Depot 2 mag niet leveren aan klant 1, tenzij depot 1 levert aan klant 4 of klant 5.
- (d). We beschouwen weer het BIP van onderdeel (a) zonder deze extra eisen. Laat $(\mathbf{x}_{\text{BIP}}^*, \mathbf{y}_{\text{BIP}}^*)$ de optimale oplossing zijn van BIP. Als de binaire $\mathbf{x}$ -variabelen in BIP gewijzigd worden in nietnegatieve continue (dus $x_{ij} \geq 0$ voor alle i en j), dan ontstaat een gemengd geheeltallig lineaire programmeringsprobleem MIP1 met optimale oplossing $(\mathbf{x}_{\text{MIP1}}^*, \mathbf{y}_{\text{MIP1}}^*)$. Beargumenteer waarom de oplossingen van BIP en MIP1 gelijk zijn, dus $(\mathbf{x}_{\text{BIP}}^*, \mathbf{y}_{\text{BIP}}^*) = (\mathbf{x}_{\text{MIP1}}^*, \mathbf{y}_{\text{MIP1}}^*)$.
- (e). Nu gaan we MIP1 wijzigen door de restricties (4) te vervangen door

$$x_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Noem het nieuwe gemengd geheelgetalig lineaire programmeringsprobleem MIP2 met optimale oplossing $(\mathbf{x}_{\text{MIP2}}^*, \mathbf{y}_{\text{MIP2}}^*)$. Beargumenteer waarom de oplossingen van MIP1 en MIP2 gelijk zijn, dus $(\mathbf{x}_{\text{MIP1}}^*, \mathbf{y}_{\text{MIP1}}^*) = (\mathbf{x}_{\text{MIP2}}^*, \mathbf{y}_{\text{MIP2}}^*)$.

- (f). Beschouw nu de LP-relaxaties van MIP1 en MIP2: LP1 en LP2. Geef de toegelaten gebieden Ω_{LP1} en Ω_{LP2} van LP1 respectievelijk LP2, als verzamelingen (in een meerdimensionale ruimte) die bepaald worden door lineaire restricties. Laat dan zien dat $\Omega_{\text{LP2}} \subset \Omega_{\text{LP1}}$. Geef daarbij een voorbeeld van een $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega_{\text{LP1}} \setminus \Omega_{\text{LP2}}$. Concludeer hieruit welke modellering MIP1 of MIP2 de voorkeur geniet en beargumenteer waarom.

Opgave 3

We beschouwen hier de MIP2-formulering van het probleem van opgave 2:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n f_j y_j \\ \text{onder} \quad & \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ & x_{ij} \geq 0, y_j \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Laat de volgende instantie gegeven: $n = 4$ depots, $m = 6$ klanten, en kosten

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 13 & 4 \\ 1 & 9 & 4 & 11 \\ 15 & 2 & 6 & 3 \\ 9 & 11 & 4 & 8 \\ 7 & 23 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 11 & 5 \end{pmatrix} \quad \mathbf{f} = \begin{pmatrix} 21 \\ 16 \\ 25 \\ 24 \end{pmatrix}$$

De optimale criteriumwaarde is z_{MIP2}^* .

- De LP relaxatie LP2 van MIP2 geeft een ondergrens $z_{\text{LP2}}^* = 56$. Hoe kun je een bovengrens vinden van z_{MIP2}^* ? Bereken een bovengrens.
- Onder- en bovengrenzen heb je nodig in de Branch&Bound methode. Beschrijf deze methode (voor MIP2) in woorden en geef een stappenplan van het algoritme.
- De optimale oplossing van LP2 is

$$\mathbf{x}_{\text{LP2}}^* = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.0 & 0.5 & 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 0.0 & 0.5 & 0.0 \\ 0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{y}_{\text{LP2}}^* = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

Geef nu aan hoe je een vertakking (*branch*) zou kunnen implementeren.

- (d). Veronderstel een geheeltallig lineair programmeringsprobleem (IP) van de vorm

$$\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}, \mathbf{Dx} \geq \mathbf{e}, \mathbf{x} \geq 0 \text{ geheel}\}.$$

- (i) Formuleer de (geheeltallige) Lagrange-relaxatie van IP door de restricties $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ te dualiseren (i.e., aan de doelfunctie toe te voegen).
- (ii) Schrijf z_{IP}^* voor de optimale criteriumwaarde van IP, z_{LP}^* voor de optimale criteriumwaarde van de LP-relaxatie van IP, en $z_{\text{LR}}^*(\mathbf{u})$ voor de optimale criteriumwaarde van de Lagrange-relaxatie bij multiplicatoren $\mathbf{u}$. Bewijs

$$z_{\text{LP}}^* \leq \max_{\mathbf{u} \geq 0} z_{\text{LR}}^*(\mathbf{u}) \leq z_{\text{IP}}^*.$$

- (e). De Lagrange-relaxatie pas je toe op het probleem MIP2 door de restricties $\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$ ($i = 1, 2, \dots, m$) te dualiseren. Geef de formulering en geef aan waarin deze verschilt van die in onderdeel (d).
- (f). Stel dat je deze Lagrange-relaxatie toepast op de gegeven instantie van 4 depots en 6 klanten met Lagrange multiplicatoren $u_i = 10$ voor alle i . Laat dan zien dat de Lagrange-relaxatie oplossing onder andere heeft $x_{11} = x_{21} = x_{41} = x_{51} = x_{61} = y_1 = 1$ en $x_{31} = 0$. Hint: herschrijf de criteriumfunctie van deze Lagrange-relaxatie.
- (g). In het algemeen, hoe wordt Lagrange-relaxatie in een Branch&Bound algoritme toegepast en wat is de reden om dat te doen?

Opgave 4

Je mag hoogstens N keer met een zuivere munt gooien (worpen zijn onafhankelijk, elke keer kans $1/2$ op Kruis en kans $1/2$ op Munt). Na elke worp mag je besluiten om een volgende worp te doen of om te stoppen. (Na de N -de worp moet je stoppen). Als je stopt, krijg je de fractie van het aantal gegooide Kruisen. Bijvoorbeeld als je MKK heb gegooid en je stopt, dan ontvang je $2/3$. Het doel is om een strategie te vinden die de verwachte uitkering (op moment van stoppen) maximaliseert.

- (a). Formuleer een stochastisch dynamisch programmeringsmodel voor het vinden van een optimale strategie. Geef duidelijk aan: (i) beslissingstijdstippen, (ii) toestanden, (iii) acties (of beslissingen), (iv) overgangskansen, (v) (verwachte) éénstapsopbrengsten, (vi) waardefuncties, en (vii) de optimaliteitsvergelijkingen.

- (b). Strategie.

- (i) Geef de definitie van 'strategie'.

- (ii) Beschouw de volgende strategie.

Stop als de fractie minstens 0.5 is, ga anders door.

Formuleer deze strategie in termen van het SDP-model. Neem $N = 5$. De verwachte uitkering bij deze strategie is dan 0.7. Geef de berekeningen.

- (iii) Wanneer is een strategie optimaal? Hoe wordt een optimale strategie bepaald?

- (c). Beschouw de volgende variant: elke worp kost je € 10, maar bij stoppen ontvang je € 1000 keer de fractie van aantal gegooide Kruisen. Dus als je nu stopt na MKKK, ontvang je € 710. Pas het SDP-model aan.