

# Opgave 1

(a) Als  $k=m$  en de  $m$  kolommen lineair onafhankelijk zijn.

(b) Stel  $B \subset A$  bestaat uit kolommen  $j_1, j_2, \dots, j_m$ ,  
dan is  $x_B$  de vector van coördinaten  $(x_{j_\ell})_{\ell=1}^m$ ,  
en  $x_R$  de vector van coördinaten  $x_j$ ,  
 $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_m\}$ .

$c_B$  en  $c_R$  analog.

(c)  $x \in L$ .

$$\begin{cases} Ax = b \\ x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_R \end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow (B, R) \begin{pmatrix} x_B \\ x_R \end{pmatrix} = b \Leftrightarrow Bx_B + Rx_R = b$$

$$\Leftrightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Rx_R \quad (\text{basisvorm})$$

$x \in L$  is basisoplossing bij  $B$  als  $x_R = 0$

(d) Gegeven  $x = (x_B = B^{-1}b, x_R = 0)$

$$(i) \quad x \in N \Leftrightarrow x \geq 0 \Leftrightarrow x_B = B^{-1}b \geq 0 \quad (x_R = 0 \text{ voldoet al})$$

$$(ii) \quad z(x) = c^T x = c_B^T x_B + c_R^T x_R = c_B^T B^{-1}b$$

Laat  $\tilde{x} \in L \cap N$ . Schrijf  $\tilde{x}$  in basisvorm:

$$\tilde{x}_B = B^{-1}b - B^{-1}R\tilde{x}_R$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \text{Bereken } z(\tilde{x}) &= c_B^T \tilde{x}_B + c_R^T \tilde{x}_R \\
 &= c_B^T [B^{-1}b - B^{-1}R\tilde{x}_R] + c_R^T \tilde{x}_R \\
 &= c_B^T B^{-1}b + \left[ c_R^T - c_B^T B^{-1}R \right] \tilde{x}_R
 \end{aligned}$$

$$\text{Dus } z(x) \leq z(\tilde{x})$$

$$\Leftrightarrow \left[ c_R^T - c_B^T B^{-1}R \right] \tilde{x}_R \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (\text{omdat } \tilde{x}_R \geq 0) \quad c_R^T - c_B^T B^{-1}R \geq 0$$

$$(e) \quad w(y) = y^T b$$

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^m; y^T A \leq c^T\}$$

$$(f) \quad x \in L \cap N \Leftrightarrow Ax = b, x \geq 0$$

$$y \in Y \Leftrightarrow y^T A \leq c^T$$

$$\text{Dus } y^T b = y^T (Ax) = (y^T A) x \leq c^T x \quad \text{omdat } x \geq 0$$

$$(g) \quad \text{Definieer (dual) variabelen } y = c_B^T B^{-1}.$$

Als B aan d(iii) voldoet, dan

$$c_R^T - c_B^T B^{-1}R \geq 0. \quad \text{Ook geldt } c_B^T - c_B^T B^{-1}B = 0.$$

$$\text{Dus } c^T - c_B^T B^{-1}A \geq 0. \quad \text{Ofwel}$$

$$c^T - y^T A \geq 0 \Leftrightarrow y^T A \leq c^T \Leftrightarrow y \in Y \text{ toegestaan.}$$

(3)

(L)  $x \in L$  gegeven als  $x = (x_B = B^{-1}b, x_R = 0)$

Niet primaal toegelaten, dus  $\exists j \in B \quad x_j < 0$ .

$x$  wel dual toegelaten, dus  $c^T - c_B^T B^{-1} A \geq 0$ .

Iteratie van simplex-algoritme.

i) Kies een kolom  $a_l \in B$  waarvoor  $x_l = (B^{-1}b)_l < 0$ .

ii) Kies een kolom  $a_s \in R$  en definieer

$$B^{\text{nieuw}} = B \setminus \{a_l\} \cup \{a_s\} \quad \text{zodat}$$

$$c^T - c_{B^{\text{nieuw}}}^T (B^{\text{nieuw}})^{-1} A \geq 0.$$

De nieuwe basisoplossing is weer dual toegelaten. De oplossing is optimaal als ook  $x_B \geq 0$ . Dan optimaal voor  $P$  en  $D$ .

---

# Opgave 2

4

$$(a) \quad y_j = \begin{cases} 1 & \text{als depot } j \text{ gebruikt wordt} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{als depot } j \text{ aan klant } i \text{ levert} \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

(b) Restrictie (3) zegt dat klant  $i$  de goederen krijgt uit één depot

Restrictie (4) zorgt er voor dat  $x_{ij} = 1 \Rightarrow y_j = 1$ .

H.a.w., als klant  $i$  goederen krijgt uit depot  $j$ , dan moet depot  $j$  open zijn.

$$(c) \quad (i) \quad \sum_{j=1}^n y_j \leq 5$$

$$(ii) \quad y_2 = y_5 = 1 \Rightarrow y_4 = 0 \quad \text{lineariseren}$$

$$y_2 + y_5 + y_4 \leq 2$$

$$(iii) \quad x_{43} = 1 \Rightarrow x_{13} = x_{23} = x_{33} = 0 \quad \text{lineariseren}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + 3x_{43} \leq 3$$

$$(iv) \quad (x_{12} = 0) \quad \vee \quad \left( (x_{42} = 1) \wedge (x_{41} = 1 \vee x_{51} = 1) \right)$$

$$x_{41} + x_{51} \geq x_{12}$$

2) MIP1:  $\max \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} + \sum_j f_j y_j$   
 onder  $\sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i$   
 $x_{ij} \leq y_j \quad \forall i,j$   
 $x_{ij} \geq 0$   
 $y_j \in \{0,1\}$

Optimale oplossing MIP1 = optimale oplos. MIP2

1<sup>o</sup>) Stel MIP2 oplossing, dus  $x_{ij} \leq y_j \quad \forall i,j$   
 $\Rightarrow$  voldoet aan MIP1  $\sum_i x_{ij} \leq m y_j$

2<sup>o</sup>) Oplossingen van MIP1 voldoen aan  
 $0 \leq x_{ij} \leq 1$  (zie (d1)) en  $x_{ij} > 0 \Rightarrow y_j = 1$   
 (zie (d1)). Dus zijn MIP2 oplossingen.

(f)  $\Omega_{LP1} = \{ (x,y) \in (\mathbb{R}^{m \times n}, \mathbb{R}^n) : \sum_j x_{ij} = 1, \sum_i x_{ij} \leq m y_j, x_{ij} \geq 0, 0 \leq y_j \leq 1 \}$   
 $\Omega_{LP2} = \{ (x,y) \in (\mathbb{R}^{m \times n}, \mathbb{R}^n) : \sum_j x_{ij} = 1, x_{ij} \leq y_j, x_{ij} \geq 0, 0 \leq y_j \leq 1 \}$

Wegens  $x_{ij} \geq 0, \forall i \Rightarrow \sum_j x_{ij} \leq m y_i$

Dus als  $(x, y) \in \Omega_{LP_2} \Rightarrow (x, y) \in \Omega_{LP_1}$ .

Vf  $(x, y) \in \Omega_{LP_1} \setminus \Omega_{LP_2}$ :

$m=2, n=2$

$LP_1: x_{11} + x_{12} = 1$

$x_{21} + x_{22} = 1$

$x_{11} + x_{21} \leq 2y_1$

$x_{12} + x_{22} \leq 2y_2$

$0 \leq y_j \leq 1$

zodat  $x_{11} > y_1$

$y_1 = \frac{3}{4} \quad x_{11} = \frac{7}{8} \quad x_{12} = \frac{1}{8}$

$y_2 = 1 \quad x_{21} = \frac{1}{2} \quad x_{22} = \frac{1}{2}$

Dus

$\Omega_{BIP} \subset \Omega_{LP_2} \subset \Omega_{LP_1}$  en daardoor

$\min \{ z(x, y) : (x, y) \in \Omega_{LP_1} \}$

$\leq \min \{ z(x, y) : (x, y) \in \Omega_{LP_2} \}$

$\leq \min \{ z(x, y) : (x, y) \in \Omega_{BIP} \}$

Omdat  $LP_2$  geeft betere ondergrens dan  $LP_1$ .

Dus  $MIP_2$  verdoelt voorteen.

(a) Boven grens door een toegelaten HLP oplossing.

Bv:  $y_1 = 1 \quad y_2 = y_3 = y_4 = 0$

$x_{11} = x_{21} = x_{31} = \dots = x_{61} = 1$

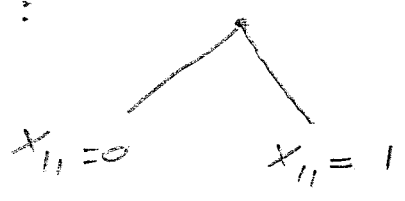
overige  $x_{ij} = 0$

Dus, alleen depot 1 gebruiken voor alle 6 planten. Totdrinmw waarde is

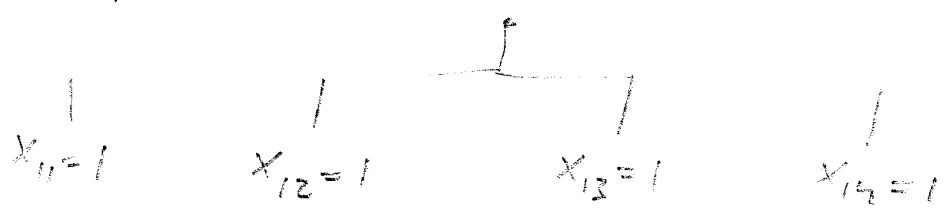
$(6 + 1 + 15 + 9 + 7 + 4) + 21 = 42 + 21 = 63$

(b) B & B algoritme. Zie syllabus.

(c) Voorbeelden:



of



(d) IP:  $\min \{ c^T x \mid Ax \geq b, Dx \geq e, x \geq 0 \text{ geheel} \}$

(e)  $Z_{LP}(u)$ :  $\min \{ c^T x - u^T (Ax - b) \mid Dx \geq e, x \geq 0 \text{ geheel} \}$

Voor  $u \geq 0$

(f) Zie syllabus.

(e) LP formulering op MIP2:

$$\min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n f_j y_j - \sum_{i=1}^m u_i \left( \sum_{j=1}^n x_{ij} - 1 \right)$$

$$\text{onder } x_{ij} \leq y_j$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad y_j \in \{0, 1\}$$

voor  $u_i \in \mathbb{R} \quad i=1, \dots, m$ . Verschuift met

(d) want  $u_i \in \mathbb{R}$  ipm  $u_i \geq 0$ . En dat omdat gedualiseerde restricties gelijkheden zijn.

(f) Herschrijf

$$\min \sum_i u_i + \min \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^m (c_{ij} - u_i) x_{ij} + f_j y_j \right]$$

$$\text{onder } x_{ij} \leq y_j, x_{ij} \geq 0, y_j \in \{0, 1\}$$

Hiernaan zie je dat  $y_j = 1$  wordt geselecteerd als er bij behorende  $x_{ij} \in \{0, 1\}$  zijn zodat

$$\sum_i (c_{ij} - u_i) x_{ij} + f_j < 0.$$

Hier:  $u_i = 10$ .  $j=1$   $c_{i1} < 10$  voor  $i=1, 2, 4, 5, 6$

$$\text{en } \sum_{i=1, 2, 4, 5, 6} (c_{i1} - 10) + f_1 = -(4+9+1+3+6) + 21 < 0.$$



- 3) Lagrange relaxatie wordt gebruikt in de knooppunten van de B & B boom om een betere ondergrens ("Min" probleem) dan LP relaxatie te krijgen. Het algoritme zal eerder stoppen (minder knooppunten te onderzoeken).

### Opdracht 4

- (a) i) Beslissingstijdstippen  $n=1, 2, \dots, N(N+1)$   
vlak voor  $n$ -de worp.
- ii) Toestanden:  $X_n = i$  is het aantal keer kruis in worpen 1 t/m  $n-1$ .  
met  $X_1 = 0$
- En een stoptoestand  $H$ .
- iii) Acties:  $Y_n = \begin{cases} d & \text{doorgaan: nog een worp} \\ s & \text{stoppen.} \end{cases}$
- Alleen toegelaten in toestand  $X_n = i$ .  
Geen actie in  $H$
- iv) Moet stoppen op tijdstip  $N+1$

(iv) Overgangswaarschijn.

$$P(X_{n+1} = i+1 \mid X_n = i, Y_n = d) = \frac{1}{2}$$

$$P(X_{n+1} = i \mid X_n = i, Y_n = d) = \frac{1}{2}$$

$$P(H \mid X_n = i, Y_n = s) = 1$$

(v) Opbrengstfunct.

$$F_n(i, d) = 0$$

$$F_n(i, s) = \frac{i}{n-1} \quad \left( \text{voor } \frac{0}{0} := 0 \right)$$

(vi) Waardefunctie

$f_n(i)$  = maximale verwachte opbrengst op moment van stoppen, als het huidige object  $i$  naar  $K$  is gezonden (en nog niet gestopt).

$$(vii) \quad f_{N+1}(i) = \frac{i}{N} \quad \forall i$$

$$f_n(i) = \max \left\{ \frac{i}{n-1} ; \frac{1}{2} f_{n+1}(i) + \frac{1}{2} f_{n+1}(i+1) \right\}$$

achtereenvolgens voor

$n = N, N-1, \dots, 1$  en  $i = 0, 1, \dots, n-1$ .

Te bepalen  $f_1(0)$ .

10) Strategie: K. schneide ich die Kette in  
 an von der möglichen Bestand von  
 in die korrespondierenden Zahlen.

21)  $R_n(i) = s$  (stoppen) als  $\frac{i}{n-1} \geq \frac{1}{2}$

$R_n(i) = d$  (oberen) als  $\frac{i}{n-1} < \frac{1}{2}$

$N=5$ . Wie beschleunigen alle möglichen Pfade.

| $1^{\text{er}}$ | $2^{\text{er}}$ | $3^{\text{er}}$ | $4^{\text{er}}$ | $5^{\text{er}}$ | optimal       | Real           |
|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|---------------|----------------|
| K               | -               | -               | -               | -               | 1             | $\frac{1}{2}$  |
| M               | K               | -               | -               | -               | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$  |
|                 | M               | K               | K               | -               | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{16}$ |
|                 |                 | M               | K               | K               | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{32}$ |
|                 |                 |                 | M               | K               | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{32}$ |
|                 |                 | M               | K               | K               | $\frac{2}{5}$ | $\frac{1}{32}$ |
|                 |                 |                 | M               | K               | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{32}$ |
|                 |                 | M               | K               | K               | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{32}$ |
|                 |                 |                 | M               | K               | 0             | $\frac{1}{32}$ |

Vermutlich optimal =  $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} \cdot \frac{7}{5}$   
 $= \frac{21}{32} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{32} \cdot \frac{7}{5} = \frac{112}{160} = \frac{14}{20} = \frac{7}{10}$

Energy understanding

$$C_n(C_i, S) = \frac{L}{h-1} * 1000 - (n-1) 10.$$

---