

TENTAMEN MATHEMATISCHE PROGRAMMERING

3 april 2002, 9.30 - 12.30 uur



Puntentelling

	totaal	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
1	20	3	6	6	2	3	
2	20	4	4	8	4		
3	20	2	2	4	12		
4	20	3	3	3	3	4	4
5	20	6	6	3	5		

Opgave 1

Het lineair programmeringsprobleem in standaardvorm luidt:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{onder} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{1}$$

- (a). De simplexmethode om (1) op te lossen leidt tot een niet-polynomiaal algoritme. Wat wordt hiermee bedoeld?
- (b). Veronderstel dat het aantal variabelen n in (1) veel groter is dan het aantal restricties m . Beschrijf de methode van kolomgeneratie om (1) op te lossen. Geef het bijbehorende stappenplan.

Het lineair programmeringsprobleem in de kanonieke vorm voor Karmarkar's inwendige puntmethode luidt:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{onder} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{0} \\ & \mathbf{1}^T \mathbf{x} = 1 \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{2}$$

- (c). Formuleer de drie basisconcepten van Karmarkar's inwendige puntmethode.
- (d). Aan welke twee voorwaarden moet het LP (2) voldoen zodat Karmarkar's methode toegepast kan worden?
- (e). Wat is het wezenlijke verschil tussen de simplexmethode en Karmarkar's methode om een lineair programmeringsprobleem op te lossen?

Opgave 2

Beschouw het geheeltallig lineair programmeringsprobleem:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{w}^T \mathbf{x} \\ \text{onder} & \mathbf{A} \mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \in \{0, 1\}^n \end{array} \quad (3)$$

waarin $\mathbf{A} = (a_{ij})$ een $m \times n$ matrix is bestaande uit nietnegatieve elementen, en waarin de vectoren $\mathbf{w}$ en $\mathbf{b}$ ook nietnegatief zijn. Noteer de optimale criteriumwaarde als $z^*(\text{IP})$.

- (a). Hoe heet dit probleem? Beschrijf het probleem in woorden en geef een toepassing.
- (b). Formuleer een LP-relaxatie van probleem (3). Noem dit probleem LP0 met bijbehorende optimale criteriumwaarde $z^*(\text{LP0})$. Is $z^*(\text{LP0})$ een boven- of ondergrens voor $z^*(\text{IP})$? Waarom?
- (c). Beschrijf de methode van *cutting planes* om een betere (boven- cq onder-) grens te krijgen.
- (d). Laat (3) gegeven zijn door

$$\begin{array}{ll} \max & 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 + 5x_5 + x_6 + 4x_7 \\ \text{onder} & 3x_1 + 7x_3 + 8x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 3x_7 \leq 10 \\ & x_1 + 7x_2 + 10x_6 + 9x_7 \leq 15 \\ & 4x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 9x_5 + 4x_6 \leq 20 \\ & x_1, x_2, \dots, x_7 \in \{0, 1\} \end{array} \quad (4)$$

Vind twee nieuwe restricties die voldoen aan de methode van *cutting planes*.

Opgave 3

Laat gegeven zijn een ongerichte samenhangende graaf $G = (V, E)$ en een kostfunctie $c : E \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.

- (a). Wat is een Eulercircuit in G .
- (b). Geef een noodzakelijk en voldoende voorwaarde voor het bestaan ervan (geen bewijs).
- (c). Bewijs dat het aantal knooppunten $v \in V$ met een oneven graad even is.
- (d). Het Chinese postbode probleem.
 - (i) Beschrijf in woorden het Chinese postbode probleem.
 - (ii) Geef een toepassing.
 - (iii) Formuleer het probleem als een geheeltallig lineair programmeringsprobleem.
 - (iv) Geef een gedetailleerd stappenplan van het algoritme om het probleem op te lossen.
 - (v) Geef een heuristiek voor het minimum-matching probleem gebaseerd op het handelsreizigersprobleem.

Opgave 4

Beschouw het kwadratische programmeringsprobleem

$$\begin{aligned} \min \quad & 4x_1^2 + 7x_2^2 + 4x_1x_2 - 5x_1 - 6x_2 \\ \text{onder} \quad & 2x_1 + x_2 \geq 3 \\ & x_1 - 3x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \tag{5}$$

- (a). Schrijf dit probleem als $\min\{\mathbf{c}^T \mathbf{x} + \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} | \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$. Specificeer de bijbehorende matrix $\mathbf{Q}$. Bewijs dat dit probleem een convex programmeringsprobleem is.

We gaan dit probleem oplossen met de de Kuhn-Tucker voorwaarden.

- (b). Stel de Lagrangefunctie $\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda)$ op:

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \{g_i(\mathbf{x}) - b_i\}.$$

Specificeer de functies $f(\mathbf{x})$ en $g_i(\mathbf{x})$ (van het probleem (5)).

- (c). De Kuhn-Tucker voorwaarden leiden tot een lineair stelsel vergelijkingen (het zogeheten lineaire complementatiteitsprobleem):

$$\begin{aligned} \mathbf{w} - \mathbf{M}\mathbf{z} &= \mathbf{q} \\ \mathbf{w} &\geq \mathbf{0}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0} \\ w_i z_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{6}$$

Specificeer de matrix $\mathbf{M}$ en de vector $\mathbf{q}$ (van het probleem (5)). NB: $n = 4$.

- (d). Veronderstel dat $(w_1, w_2, w_3, w_4, z_1, z_2, z_3, z_4)$ een oplossing is van lineaire complementatiteitsprobleem (6). Wat is de bijbehorende oplossing van het kwadratische programmeringsprobleem (5)?

- (e). Wijzig het stelsel (6) in

$$\begin{aligned} \mathbf{w} - \mathbf{M}\mathbf{z} - \mathbf{1}z_0 &= \mathbf{q} \\ \mathbf{w} &\geq \mathbf{0}, \mathbf{z} \geq \mathbf{0}, z_0 \geq 0 \\ w_i z_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{7}$$

Geef de definitie van een bijna-complementaire basisoplossing van probleem (7). Construeer een bijna-complementaire basisoplossing.

- (f). Beschrijf de stappen van het complementaire pivot algoritme om een optimale oplossing te vinden van het oorspronkelijke kwadratische programmeringsprobleem (5).

Opgave 5

Een gokker heeft 10 euro. Hij mag hoogstens vijf keer deelnemen aan een kansspel. Zijn doel is om zijn verwachte eindkapitaal te maximaliseren. Elk kansspel bestaat uit het inzetten van een geldbedrag en het raden van het aantal ogen van een te werpen zuivere dobbelsteen. (Daarna wordt de dobbelsteen gegooid door de spelleider.) De gokker heeft de volgende mogelijkheden:

- Beurt overslaan. (Dit geldt wel als een deelname, bv door 0 euro in te zetten.)
- y euro inzetten, en “even” resp. “oneven” raden. Raadt hij goed, dan ontvangt hij $3 \times y$ euro (dus inzet krijgt hij terug plus nog eens het dubbele).
- y euro inzetten, en “oneven priem” raden. Raadt hij goed, dan ontvangt hij $4 \times y$ euro.
- y euro inzetten, en een getal raden, bv “3” of “6” of $\dots$. Raadt hij goed, dan ontvangt hij $7 \times y$ euro.

De gokker kan hoogstens zoveel inzetten als hij bezit. Elke inzet is een geheel aantal euro. Heeft hij verkeerd gegokt, dan is hij zijn inzet kwijt.

(a). Strategie.

- (i) Wat wordt onder een strategie van de gokker verstaan?
- (ii) Geef een voorbeeld van een strategie.
- (iii) Hoe wordt het verwachte eindkapitaal bij een gegeven strategie berekend?
- (iv) Wanneer is een strategie optimaal?

(b). Formuleer een stochastisch dynamisch programmeringsmodel voor het vinden van een optimale strategie. Geef duidelijk aan: (i) beslissingstijdstippen, (ii) toestanden, (iii) acties (of beslissingen), (iv) overgangskansen, (v) verwachte éénstapsopbrengsten, (vi) waardefuncties, en (vii) de optimaliteitsvergelijkingen.

(c). Bepaal de optimale strategie.

(d). Pas het model aan voor het geval dat het criterium is: maximaliseer de kans op het bereiken van 25 euro (ook weer in hoogstens vijf deelnames).