Tentamen 3/4/2002

Opgave 1

a) (i) Omvang v/h probleem wordt bepaald door

n = # variabelen

m = # restricties

(ii) Algoritme kwaliteit: aantal berekeningen tot optimale opl. gevonden is = functie $f(m,n)$

(iii) $f(m,n)$ is niet polynomiaal in n en/of m

bv. $f(m,n) = 2^n$.

b) (i) Kies een deelvz. $N \subset \{1,\dots,n\}$ van kolommen, laat D de bijbehorende deelmatrix van A zijn.

(ii) Los op m.b.v. revised simplex

$$\max \{ c_N^T x_N \mid D x_N = b,\ x_N \geq 0 \} \quad (*)$$

(iii) Controleer of de oplossing ook optimaal is voor (1) m.b.v. de duale variabelen en relatieve kosten

(iv) Zo niet: uitbreiden N door kolommen toe te voegen (en evt. andere te verwijderen)

B is optimaal voor (*). $y = c_B^T B^{-1}$

$\bar{c} = y^T A - c$

optimaal als $\bar{c} \geq 0$

Algoritme stap $N_1 \subset \{1, \dots, n\}$ $k = 1$

Stap 1: Los ⊗ op met N_k

Stap 2: Als $\bar{z} \geq 0$ stop

Stap 3: $(\exists_j \; \bar{z}_j < 0)$ Vervang N_k door N_{k+1} : $k = k+1$
ga naar stap 1

(c)
1: Alleen inwendige oplossingen

2: In elke iteratie criterium waarde zo veel mogelijk verbeteren

3: door transformatie is iedere oplossing in de iteratie het middelpunt v. toegelaten gebied

(d) (i) Optimale criterium w. $z^* = 0$
(ii) $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})^T$ is toegelaten

(e) Alleen inwendige punten.
Algoritme loopt polynomiaal

Opgave 2

(a) Hoog dimensionale knapzak

Uit een pakket projecten worden de meest lucratieve gekozen onder ~~vaste~~ budgetbeperkingen.

Project - selectie
in versterking

(b) $\max \{ w^T x \mid A x \leq b, \ 0 \leq x_j \leq 1 \ j = 1 \ldots n \}$

$z^*(IP) \leq z^*(LP0)$ "begrenzing"

Want toegelaten gebied is groter.

(c) $\Omega(IP)$ = toegelaten gebied IP

$\Omega(LP0)$ = - - - - - LP0.

Cutting planes: voeg restricties toe aan LP0 totdat een LP ontstaat met

$$\Omega(IP) \subset \Omega(LP) \subset \Omega(LP0)$$

verdeelt een betere bovengrens.

Merk op: geen toegelaten IP-oplossingen "kwijt raken"

(d) bv. snede op:

$$3x_1 + 7x_3 + 8x_4 + 6x_5 + 5x_6 + 3x_7 \leq 10$$
$$x_j \in \{0,1\}$$

$$\Rightarrow \neg(x_3 = x_4 = 1) \Leftrightarrow x_3 + x_4 \leq 1$$

enz.

opl: i-de restrictie $* \, u_i$ $(u_i \geq 0)$

en samentellen + afronden

bv. $\frac{1}{2} *$ restr. 1 $+ \frac{1}{2} *$ restr. 2 :

$$\begin{cases} 2x_1 + \frac{7}{2}x_2 + \frac{7}{2}x_3 + 4x_4 + 3x_5 + \frac{15}{2}x_6 + 6x_7 \leq \frac{25}{2} \\ x_j \in \{0,1\} \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 + 7x_6 + 6x_7 \leq 12$$

enz.

Opgave 3

(a) Eulercircuit: randreis die alle takken precies één keer gaat.

(b) graad (v) = even $\forall v \in V$

$\#$ takken incident met v

(c) $\delta(v) = \text{graad}(v)$ $V^- = \{v \in V ; \delta(v) \text{ is oneven}\}$

$V^+ = \{v \in V ; \delta(v) \text{ is even}\}$

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E| \quad \text{want elke tak dubbel}$$

$$\Longrightarrow \sum_{v \in V^-} \delta(v) = \underbrace{2|E| - \sum_{v \in V^+} \delta(v)}_{\text{is even}}$$

Som van oneven getallen is even

$\Leftrightarrow$ aantal is even

dus. $|V^-|$ is even.

(d) (i) Vind een randreis in g die alle takken (één of meer keer) bevat tegen zo laag mogelijke kosten

(ii) Vriendelijk opgelost

(iii) Invoeren $x_e \in \{0, 1, \ldots\}$ is aantal keer dat je kant e bezoekt

$$\min \sum_{e \in E} c_e x_e$$

onder $x_e \geq 1 \quad \forall e \in E$ (alle kanten minstens één keer bezoeken)

$$\sum_{e \text{ incident met } v} x_e \text{ is even } \quad \forall v \in V$$ (rondreis voorwaarde)

(iv) 1e bepaal V^- (punten met oneven graad)

2e bepaal voor alle paren $(v_i, v_j) \in V^-$ kortste pad $P_{ij} \subset G$ met lengte d_{ij}

3e beschouw volledige graaf met $|V^-|$ punten en kosten d_{ij} op de takken. Vind in deze graaf een minimale matching.

4e voeg alle takken van de corresponderende paden P_{ij} van de matching extra toe aan G.

5e bepaal Eulercircuit in de nieuwe graaf

(v) Zij $v_1 - v_2 - v_3 - \cdots - v_n - v_1$ is TSP route. Dan $(v_1, v_2)\ (v_3, v_4) \ldots, (v_{n-1}, v_n)$ is matching

$(v_2, v_3)\ (v_4, v_5) \ldots (v_n, v_1)$ ..

alleen als n even met positieve kosten

Opgave 5

Alleen (a) en (b) !!

(a) $Q = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$

convex $\Leftrightarrow$ eigenw. van $Q \geq 0$

$\det(Q - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 - 11\lambda + 28 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 - 11\lambda + 24 = 0 \Leftrightarrow$

$(\lambda - 8)(\lambda - 3) \Rightarrow \lambda = 3$ en $\lambda = 8 > 0.$

(b) $f(x) = 4x_1^2 + 7x_2^2 + 4x_1x_2 - 5x_1 - 6x_2$

$g_1(x) = 2x_1 + x_2$

$g_2(x) = x_1 - 3x_2$

$g_3(x) = x_1$

$g_4(x) = x_2.$

3-04-2002

Opgave 5

(a) (i) Strategie = verzameling voorschriften, op elk "tijdstip", bij elk kapitaal, etc. te nemen beslissingen:

$R = (R_1, \dots, R_5)$

$R_n : \{0, 1, \dots\} \longrightarrow$ beslissingen
kapitaal

(ii) Altijd volledige kapitaal inzetten op "even"

(iii) Via recursie, achterwaarts:

$V_n(i, R)$ = verwachte kapitaal van een partij n t/m 5 als kapitaal i is.

$$V_n(i, R) = c_n(i, a) + \sum_j p_n(j \mid i, a)\, V_n(j, R)$$

zie (a)

Opl: via "pcdm"

(iv) $V_n(i, R^*) \geq V_n(i, R) \quad \forall i, n, R$

(b) (i) Beslissingstijdstippen $n = 1, 2, \ldots, 5$ vlak voor volgende ronde

(ii) toestand X_n = kapitaal

(iii) actie $Y_n = (d, y) = a$

$d = 1$: even

$d = 2$: oneven

$d = 3$: één van priem

$d = 4$: " "

$\vdots$

$d = 9$: " 6 "

y = aantal

(iv) $p_n(j \mid i, a) =$

$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i,\ Y_n = a = (d, y)) =$

overgangsvoorbeelden:

$(i, (1, y)) \to i + 2y$ met kans $\frac{1}{2}$

$\hookrightarrow i - y$ " " $\frac{1}{2}$

voor $y \leq i$

$(i, (3, y)) \to i + 3y$ met kans $\frac{1}{3}$

$\hookrightarrow i - y$ " " $\frac{2}{3}$

$(i, (4, y)) \to i + 6y$ met kans $\frac{1}{6}$

$\hookrightarrow i - y$ " " $\frac{5}{6}$

(v) $c_n(i,a)$ = verwachte [illegible] [illegible] winst.

bv.

$$c_n(i,(1,y)) = \frac{1}{2}(2y-y) = \frac{1}{2}y$$

$$c_n(i,(3,y)) = \frac{1}{3}3y - \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}y$$

$$c_n(i,(4,y)) = \frac{1}{6}6y - \frac{5}{6}y = \frac{1}{6}y$$

(vi) $f_n(i)$ = maximale verwachte opbrengst van n t/m 5 als op tijdstip n toestand i is

(vii) $f_6 \equiv 0$

$$f_n(i) = \max_a \left\{ c_n(i,a) + \sum_j p_n(j \mid i,a) f_{n+1}(j) \right\}$$

$n = 5, \ldots, 1$

te bepalen $f_1(10)$

(c) $R_n^*(i)$ is de optimale actie in $\mathcal{A}(i)$

Uit (v) volgt: optimaal is steeds zoveel mogelijk inzetten op [illegible] (of [illegible])

(d) Beslissingstijdstip
toestand
overgangskansen
} veranderen niet.

Opbrengst: — (is er niet).

$f_n(i)$ = maximale kans op bereiken van €25 na 5 dochten als op tijdstip n kapitaal i is.

$$f_6(i) = \begin{cases} 1 & \text{voor } i \geq 25 \\ 0 & \text{voor } i < 25 \end{cases}$$

$$f_n(i) = \max_a \sum_j p_n(j \mid i, a)\, f_{n+1}(j)$$

$n = 5, 4, \ldots, 1$