

Tentamen Mathematische Methoden

25 maart 2015, 12:00–14:00

Er zijn 7 vragen waarvoor je in totaal 36 punten kunt halen. Het cijfer wordt gegeven door $(\text{aantal punten} + 4)/4$. Gebruik van rekenmachine, boek of aantekeningen is niet toegestaan. Vermeld op elk blad dat je inlevert je naam, studierichting en studentnummer. Geef bij elke opgave niet alleen het antwoord, maar ook je berekening. Veel succes!

1. [3+2 punten] Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- (a) Bereken de cosinus van de hoek θ tussen $\mathbf{a}$ en $\mathbf{b}$.
(b) Bereken $\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$.

2. [5 punten] Gegeven is dat $z = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$ waarbij $x = 3u + v^2$ en $y = 3u - v^2$. Bepaal de kettingregel voor $\frac{\partial z}{\partial v}$ in deze situatie, en bereken $\frac{\partial z}{\partial v}$ door middel van deze kettingregel. Geef je antwoord in de vorm van een expliciete functie waarin u en v de enige variabelen zijn.

3. [5 punten] Bereken de richtingsafgeleide van de functie

$$f(x, y) = \frac{x^2}{2 + y}$$

in de richting van de vector $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ in het punt $(1, -1)$.

4. [5 punten] Bepaal een vergelijking voor het raakvlak aan de grafiek van de functie

$$f(x, y) = e^{x^2 - y}$$

in het punt P_0 met (x, y) -coördinaten $(x_0, y_0) = (2, 4)$.

5. [5 punten] Gegeven is het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} x = u^2 + v^2 \\ y = 2uv - u^2 \end{cases}$$

We beschouwen u en v als functies van x en y in de buurt van het punt P_0 met (u, v) -coördinaten $(u_0, v_0) = (1, -2)$. Bereken $\frac{\partial u}{\partial y}$ in dit punt.

6. [2+2 punten] Beschouw het vectorveld

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2x^2y \mathbf{i} - y^2z \mathbf{j} + \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 2x^2y \\ -y^2z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Bereken $\nabla \bullet \mathbf{F}$.
(b) Bereken $\nabla \times \mathbf{F}$.

7. [7 punten] De functie $f(x, y) = x(2y - 3)e^{y - \frac{1}{2}x^2}$ heeft partiële afgeleiden

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= (1 - x^2)(2y - 3)e^{y - \frac{1}{2}x^2} \\ f_2(x, y) &= x(2y - 1)e^{y - \frac{1}{2}x^2} \end{aligned}$$

Bepaal en klassificeer de kritieke punten van $f(x, y)$.

NB: Je hoeft niet te controleren dat de gegeven formules voor $f_1(x, y)$ en $f_2(x, y)$ correct zijn. Reken meteen met de gegeven formules verder.