

Vrije Universiteit, Faculteit Exacte Wetenschappen

Tentamen Mathematische Methoden voor FAR

6 juni 2011, 18:30–21:15

Tentamencijfer = $1 + \frac{\text{totaal}}{10}$

Gebruik van rekenmachine, boek of aantekeningen is niet toegestaan.

Vermeld op ieder blad dat je inlevert je naam en je studentnummer.

Geef niet alleen antwoorden, maar ook de berekeningen.

Veel succes!

Opgave 1. (6 punten)

Bepaal alle oplossingen van

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. (8 punten)

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 8 \\ 2 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Bereken A^{-1} .

Opgave 3. (8 punten)

Voor welke reële getallen t is de 3×3 -matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & t-1 & 1 \\ 1 & t+1 & t+4 \end{pmatrix}$$

inverteerbaar? Geef uitleg bij je antwoord.

Opgave 4. (18 = 10 + 2 + 6 punten)

Gegeven is de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Bepaal de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren van A .

b) Bepaal alle oplossingen van

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

c) Bepaal nu de oplossing $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ van de differentiaalvergelijking uit b) die voldoet aan $x(0) = 0$ en $y(0) = 5$.

Z.O.Z.

Opgave 5. (6 punten)

Van een functie $f(x, y)$ is bekend dat

$$f_1(1, 1) = 1 \quad \text{en} \quad f_2(1, 1) = 2.$$

Verder is $u = f(x, y)$, waarbij $x = g(t)$, $y = h(t)$, $g(0) = h(0) = 1$ en $g'(0) = h'(0) = 1$.

Bepaal $\frac{du}{dt}$ in $t = 0$.

Opgave 6. (6 punten)

Gegeven zijn de vectoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestaat er een vector $\mathbf{w}$ met $\mathbf{u} \times \mathbf{w} = \mathbf{v}$? Leg kort uit.

Opgave 7. (8 punten)

De functie $f(x, y)$ is gegeven door

$$f(x, y) = -y^2 - x^3 + xy^2.$$

Bepaal een vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in het punt $(1, 4, -1)$.

Opgave 8. (14 = 6 + 8 punten)

We bekijken het stelsel vergelijkingen

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = u \cos(x) + xv^2 - 2yv^2 + y = 0 \\ G(x, y, u, v) = v \sin(x) + xu^2 + v^5 - u + xy = 0 \end{cases}$$

We merken op dat $(x, y, u, v) = (0, 1, 1, 1)$ aan de vergelijkingen voldoet.

Verder is gegeven dat het stelsel in de buurt van het punt $(0, 1, 1, 1)$ kan worden opgelost door $u = u(x, y)$ en $v = v(x, y)$. (Dit hoeft je dus niet na te gaan.)

a) Bereken $\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}, \frac{\partial G}{\partial u}, \frac{\partial G}{\partial v}$ en $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial y}$.

b) Bepaal vervolgens $\frac{\partial u}{\partial y}$ en $\frac{\partial v}{\partial y}$ in $(x, y, u, v) = (0, 1, 1, 1)$.

Opgave 9. (12 = 6 + 6 punten)

De functie $f(x, y)$ is gegeven door

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 6xy + 8.$$

a) Bepaal de stationaire punten van f .

b) Ga na waar f een lokaal minimum of maximum of een zadelpunt heeft.

Opgave 10. (4 punten)

Gegeven is het vectorveld

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} y^2 z \\ -x^3 \\ xy \end{pmatrix}.$$

Bepaal $\nabla \times F$.