

# Tentamen Mathematische Methoden

Datum 31 mei 2011  
Zaal WN-S655  
Tijd 18:30 - 21.15 uur  
Docent B.L.G. Bakker

*Bij het tentamen mag je het boek van Riley, Hobson en Bence gebruiken.*

## Opgave 1.

Gegeven is de differentiaalvergelijking

$$4x \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + 2 \frac{dy(x)}{dx} + y(x) = 0. \quad (1)$$

a Bepaal of  $x = 0$  een regulier of een singulier punt van deze differentiaalvergelijking is.

b Gebruik de methode van Frobenius om de oplossingen van vgl. (1) te bepalen die regulier zijn in  $x = 0$ .

## Opgave 2.

De Legendre-polynomen  $P_n(x)$  kunnen worden geschreven als hypergeometrische functies, als volgt:

$$P_n(x) = F\left(-n, n+1, 1; \frac{1-x}{2}\right). \quad (2)$$

a Bewijs dat  $F\left(-n, n+1, 1; \frac{1-x}{2}\right)$  voldoet aan de differentiaalvergelijking van Legendre.

b Toon aan dat  $F\left(-n, n+1, 1; \frac{1-x}{2}\right)$  ook voldoet aan de conventionele normering van de Legendre-polynomen

## Opgave 3.

De functies

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-x^2/2} \quad (3)$$

met  $H_n(x)$  een Hermite-polynoom, vormen een orthonormaal stel op de reële as:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_{n'}(x) \psi_n(x) = \delta_{n'n}. \quad (4)$$

a Bepaal de integralen

$$X_{n'n}^{(1)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x \psi_{n'}(x) \psi_n(x) \quad (5)$$

b Bepaal ook de integralen

$$X_{n'n}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \psi_{n'}(x) \psi_n(x) \quad (6)$$

Op de achterkant staan opgaven 4 en 5.

#### Opgave 4.

Gegeven is de integraalvergelijking

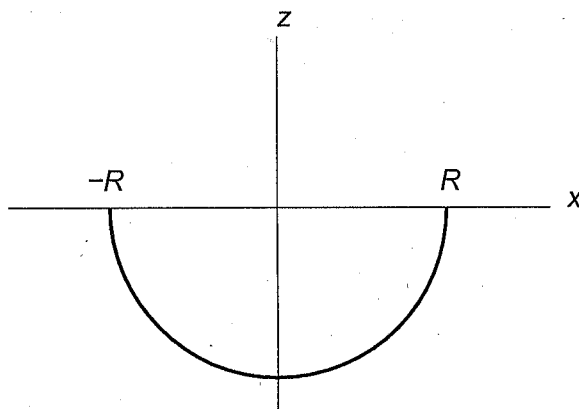
$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 dz K(x, z) \phi(z), \quad K(x, z) = \left(\frac{x}{z}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{z}{x}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (7)$$

a Bepaal de eigenwaarden van de integraaloperator  $K$ , d.w.z. de waarden van  $\lambda$  waarvoor vgl. (7) met  $f(x) = 0$  een niet-triviale oplossing heeft.

b Los vgl. (7) op voor  $f(x) = 1$  en  $\lambda = 1$ .

#### Opgave 5.

Om een horizontaal geplaatste cylinder met straal  $R$  is een touw strak gespannen. We kiezen een assenstelsel met de  $y$ -as langs de as van de cylinder (zie de figuur).



Het touw loopt van het punt  $(-R, 0, 0)$  naar  $(R, 0, 0)$  onder langs de cylinder.

a Als de massa van het touw per lengte-eenheid  $\rho$  gelijk is aan 1 en de grootte van de zwaartekrachtsversnelling  $g$  ook 1 wordt genomen, bereken dan de potentiële energie van het touw in deze situatie.

b Als we de cylinder verwijderen, maar de uiteinden van het touw op hun plaats houden, zal het touw de vorm van een *kettinglijn* (catenary) aannemen.

Beredeneer dat het laagste punt van die kettinglijn de coördinaten  $(x, y, z) = (0, 0, -Z)$  heeft met  $Z > R$ .

#### Normering

|   |   |    |   |   |   |   |   |    |   |   |    |   |   |   |
|---|---|----|---|---|---|---|---|----|---|---|----|---|---|---|
| 1 | a | 4  | 2 | a | 6 | 3 | a | 12 | 4 | a | 12 | 5 | a | 6 |
|   | b | 16 |   | b | 4 |   | b | 12 |   | b | 12 |   | b | 6 |