

Mathematische systeemtheorie

Paulien Out, Natalia Skoraia

March 4, 2005

1 Opdracht 1

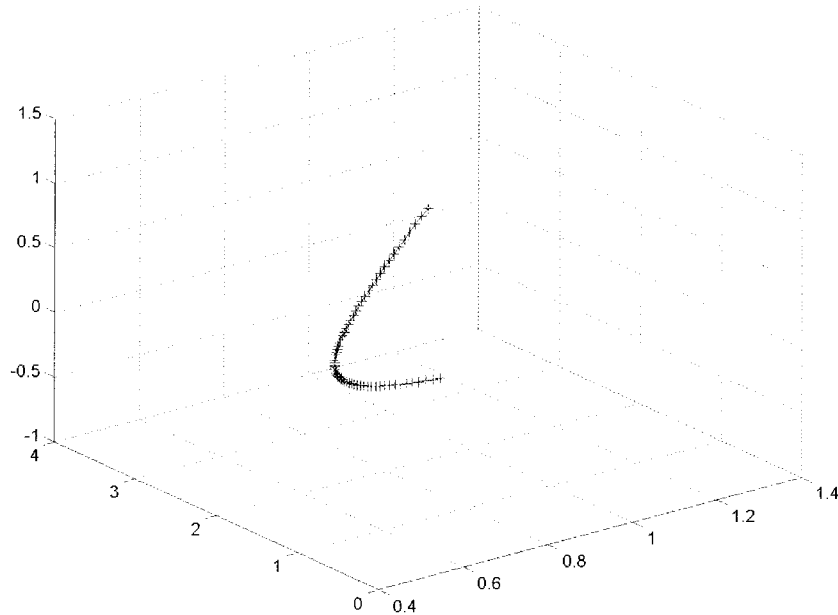
Onze matrix ziet er als volgt uit:

$$A = \begin{pmatrix} 0.9583 & 0.0257 & 0 \\ -0.0049 & 1.0371 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

De startvector is:

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0.6220 \\ 0.4055 \\ 0.3333 \end{pmatrix}$$

Vervolgens hebben we de commando's uitgevoerd zoals ze gegeven staan in de opdracht. Het plaatje dat we hebben gekregen ziet er als volgt uit:



De eigenwaarden van A zijn 0.9600, 1.0355 en 1.0000. De bijbehorende eigenvectoren staan in de matrix V:

$$V = \begin{pmatrix} -0.9980 & -0.3162 & 0 \\ -0.0635 & -0.9487 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}$$

Deze waarden zijn verkregen met het commando $[V,D]=\text{eig}(A)$.

Als $x_{k+1} = Ax_k$ en A is een n bij n matrix met n lineair onafhankelijke eigenvectoren, dan kan x_k worden geschreven als $x_k = c_1(\lambda_1)^k v_1 + \dots + c_n(\lambda_n)^k v_n$ waarin λ_i en v_i de eigenwaarden en eigenvectoren zijn van A. De waarden voor c_i worden gevonden uit $x_0 = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$.

Dat de waarden van het derde element van x_k altijd gelijk is voor elke k kan nu worden verklaard doordat de derde eigenwaarde 1 is en alleen de derde eigenvector een niet-nul element heeft op plaats drie, namelijk 1.

Omdat $0 < \lambda_1 < 1$ nadert λ_1^k naar nul als k nadert naar oneindig. $\lambda_3 = 1$ dus $\lambda_3^k = 1$ voor elke waarde van k. Voor grote waarden van k kan je dan

schrijven $x_k = c_2 \lambda_2^k v_2 + c_3 v_3$. Elke tijdsstap komt er dan bij $1.0355 c_2 v_2$. Voor positieve c_2 zullen de eerste twee elementen van x_k dalen als k toeneemt, de derde blijft zoals gezegd gelijk.

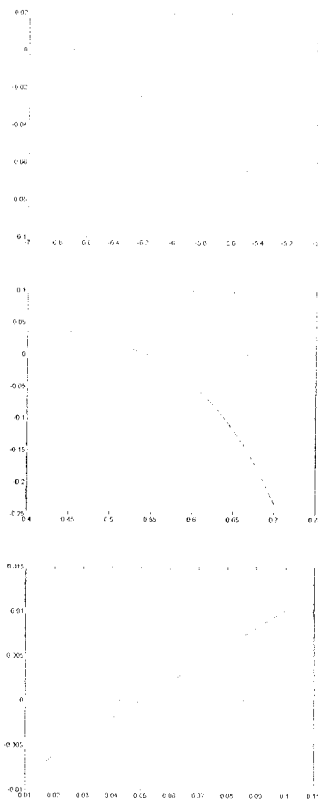
2 Opdracht2

Onze waarden zijn:

teller=(1.0000, 6.0916, -3.9378, 0.1812, 0), noemer=(1.0000, -9.6092, 26.6214, -17.4750, 0)

De nulpunten van f liggen op die plaatsen waar de roots van de teller zijn behalve daar waar de noemer nul is, dat is bij -6.6848, 0.5432 en 0.0499.

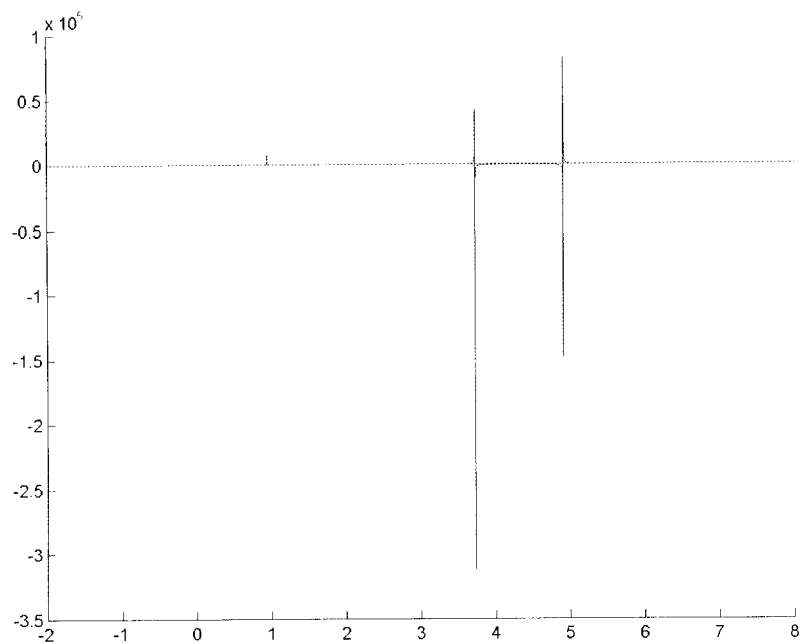
Deze punten zijn duidelijk te zien in de volgende grafieken:



Polen zijn de punten waarvoor $\lim_{x \rightarrow a} |F(x)| = \infty$ geldt. De polen van f liggen

op de plaatsen waar de roots van de noemer zijn behalve als de teller nul is, dat is bij 4.9217, 3.7376 en 0.9500.

De gehele grafiek ziet er als volgt uit:



We kunnen de functie f in de vorm schrijven:

$$f(x) = a_0 + a_1x^{-1} + a_2x^{-2} + \dots + a_nx^{-n} + x^{-n}R_n(x)$$

We kunnen de eerste constante a_0 berekenen door polynomen teller en noemer te delen m.b.v. commando $[Q,R]=\text{deconv}(\text{teller},\text{noemer})$ in Matlab. Het eerste element van Q is dan de juiste waarde van a_0 .

Het volgende deel van de functie moet zijn a_1x^{-1} . Als we de Rest schrijven als het polynoom behorende bij R vermenigvuldigd met x kunnen we voor de rest x^{-1} zetten. We kunnen de teller van het polynoom vermenigvuldigd met $x+0$ in matlab berekenen met het commando $\text{conv}([1 \ 0], R)$. De uitkomst hiervan kunnen we weer delen door de noemer door $[Q,R]=\text{deconv}(\text{ans}, \text{noemer})$. Hierin is ans het antwoord van het vorige commando. Nu hebben we

dus de waarde voor a_1 gevonden.

Dit herhalen we een aantal maal tot we ook a_6 hebben. De rationale functie $R_6(x)$ wordt dan gegeven door het polynoom van de laatste Rest gedeeld door de gegeven noemer.

We krijgen volgende waarden: $a_0 = 1$, $a_1 = 15.7009$, $a_2 = 120.3144$, $a_3 = 755.8089$, $a_4 = 4334.2$, $a_5 = 23630$, $a_6 = 12490$ voor $n=6$.

De rationale functie $R_6(x)$ ziet er als volgt uit:

$$R_6 = \frac{646800x^3 - 2911900x^2 + 2182500x}{x^4 - 9.6092x^3 + 26.6214x^2 - 17.4750x}$$

De vraag is of we f kunnen schrijven in de vorm:

$$f(x) = b_0b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + x^n S_n(x)$$

Het is duidelijk dat in dit geval b_0 gelijk moet zijn aan a_0 uit de vorige opgave, dus 1. Wat we dan overhouden is een restterm gedeeld door de noemer. We kunnen hier een x voor zetten als we de noemer met x vermenigvuldigen. Als we dit doen is de teller natuurlijk niet deelbaar door de nieuwe noemer, en dus houden we nog steeds de restterm over. De constante b_1 is dus nul. Dit kunnen we n keer herhalen.

$f(x) = g(x)/overh(x)$ waarbij g en h allebei polynomen van dezelfde graad zijn wordt dan:

$f(x) = b_0 + x^n \frac{P}{x^n h(x)}$ waarbij b_0 de Q is in het resultaat van het commando $[Q,R]=deconv(teller,noemer)$ en P het polynoom horende bij de vector R uit hetzelfde commando. Het is dus mogelijk om met behulp van matlab de functie f in de gewenste vorm te schrijven.

Het resultaat is:

$$f(x) = 1 + x^n \frac{15.7009x^3 - 30.5592x^2 + 17.6562x}{(1.0000x^{n+4} - 9.6092x^{n+3} + 26.6214x^{n+2} - 17.4750x^{n+1})}$$

3 Opdracht 3

Onze matrix A is:

$$A = \begin{pmatrix} 2.3320e & -0.11200 & 1.5400 & 3.2420 & 3.5760 & -1.2200 \\ 3.3870 & -0.022000 & 0.10000 & 2.0830 & 1.3210 & -0.50400 \\ 4.4150 & 3.4550 & -0.76300 & 0.10300 & 1.2620 & 0.91700 \\ -0.12100 & 2.5680 & -0.032000 & -1.2430 & 0.77000 & 0.81600 \\ -2.2420 & 3.6660 & 1.1120 & -1.5800 & 2.5230 & 0.76900 \\ 2.3540 & 1.3260 & 1.6100 & 2.7030 & 4.1990 & -0.82500 \end{pmatrix}$$

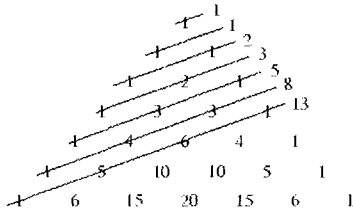
Met de functie $\text{rank}(A)$ krijgen we dat de rang van A gelijk is aan 6. Ook als we de singuliere waarden decompositie uitvoeren en daarna de rang van S opvragen krijgen we de waarde 6. Te zien is dat de eerste drie singuliere waarden duidelijk verschillen van nul, terwijl de laatste drie zeer dicht bij nul liggen, ze zijn een constante maal e^{-4} . Het is dus waarschijnlijk dat bij de oorspronkelijke matrix A deze singuliere waarden nul waren, en dat ze nu van nul verschillen vanwege de afrondingen die in de elementen van A hebben plaatsgevonden. Dan heeft de oorspronkelijke matrix A dus drie singuliere waarden ongelijk aan nul, en heeft dus rang 3.

Wat we doen om de gevraagde matrix te bepalen is het volgende: we maken in de matrix S die we gevonden hebben met het commando $[U,S,V]=\text{svd}(A)$ de elementen op plaats (4,4), (5,5) en (6,6) gelijk aan 0, en we berekenen de matrix $A2 = USV^T$. Door $A2-A$ te berekenen kunnen we controleren of de nieuwe matrix veel verschilt van de gegeven A. Het blijkt dat op alle plaatsen het verschil tussen A en A2 kleiner is dan 10^{-3} . We controleren nog of de gevonden matrix A2 rang 3 heeft en dat blijkt het geval te zijn. De gevonden A2 is:

$$A2 = \begin{pmatrix} 2.3320 & -0.11202 & 1.5400 & 3.2420 & 3.5760 & -1.2200 \\ 3.3870 & -0.022134 & 0.10002 & 2.0831 & 1.3211 & -0.50354 \\ 4.4150 & 3.4551 & -0.76307 & 0.10305 & 1.2620 & 0.91693 \\ -0.12088 & 2.5679 & -0.031804 & -1.2432 & 0.77000 & 0.81582 \\ -2.2421 & 3.6660 & 1.1119 & -1.5799 & 2.5230 & 0.76928 \\ 2.3540 & 1.3261 & 1.6101 & 2.7030 & 4.1989 & -0.82523 \end{pmatrix}$$

4 Opdracht 4

In de driehoek van Pascal vormen de sommen van de diagonalen de reeks van Fibonacci getallen. Dit is te zien in het volgende plaatje:



Om dit duidelijk te maken met behulp van matlab hebben we twee functies geschreven. De eerste functie heet driehoek(n) en berekent de eerste n rijen van de driehoek van Pascal. Die rijen zet hij in een matrix en hij vult de ontbrekende elementen aan met nullen.

Als voorbeeld volgt hier het resultaat van het commando driehoek(4):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Nu we deze matrix hebben, kunnen we daarmee de eerste vier Fibonacci getallen bepalen. We weten dat deze zijn 1, 1, 2, 3. De functie die we hiervoor hebben gemaakt heet sommen(A) en deze geeft de sommen van de diagonalen die van linksonder tot linksboven lopen tot en met de middelste diagonaal van de matrix A. Deze sommen zet hij in een vector. De functie werkt alleen voor vierkante matrices. Als we nu de matrix B gebruiken als input van deze functie, dus als we doen sommen(B), dan zouden we moeten krijgen [1,1,2,3]. Als we dit doen krijgen we het volgende:

ans = 1 1 2 3

Dit was inderdaad precies wat we wilden hebben. We hebben dit voor verschillende n uitgevoerd, en inderdaad kregen we steeds als resultaat de eerste n Fibonacci getallen. De code van de functies is te vinden in de files driehoek.m en sommen.m.