

1. Verzamelingen

- (a) Algemene kennis.
- (i) Wat verstaat men onder het *symmetrisch verschil* $A \Delta B$ van twee verzamelingen A en B ? Geef bovendien het resultaat als $A := \{0, 1\}$ en $B := \{1, 2\}$.
- (ii) Geef een voorbeeld van een *partitie* van de verzameling
- $$\text{WeekDagen} := \{ma, di, woe, do, vrij, za, zo\}$$
- in twee parten.
- (b) Venn-diagrammen en aantallen. Gegeven zijn drie verzamelingen A, B, C met (respectievelijk) 9, 8, 7 elementen in een universum U met 20 elementen. Verder is gegeven dat
- $$\#(A \cap B \cap C) = 1,$$
- $$\#(A \cap B) = \#(B \cap C) = \#(C \cap A) = 3.$$
- Bepaal de volgende *aantallen* met behulp van *Venn-diagrammen*:
- $$\#(A \cup B \cup C), \quad \#(A' \cap B' \cap C'), \quad \#(U \setminus (A \cup B)).$$
- (c) De volgende gelijkheid is correct:
- $$A' \cup (B \cap C)' = (A \cap B)' \cap (A \cap C)'.$$
- Controleer de gelijkheid met behulp van de *wetten van de verzamelingenalgebra*. Geef daarbij stap voor stap aan welke wetten je gebruikt.

2. Relaties

In deze opgave gebruiken we opnieuw de verzameling.

$$\text{WeekDagen} := \{ma, di, wo, do, vr, za, zo\}.$$

Verder hebben we twee binaire relaties $R := \text{VolgendeWerkDag}$ en $S := \text{Eergisteren}$ in de verzameling WeekDagen , gegeven door opsomming:

$$R := \{ \langle ma, di \rangle, \langle di, wo \rangle, \langle wo, do \rangle, \langle do, vr \rangle, \langle vr, ma \rangle, \langle za, ma \rangle, \langle zo, ma \rangle \}.$$

$$S := \{ \langle ma, za \rangle, \langle di, zo \rangle, \langle wo, ma \rangle, \langle do, di \rangle, \langle vr, wo \rangle, \langle za, do \rangle, \langle zo, vr \rangle \}.$$

- (a) Stel de relaties R en S elk apart voor door middel van *gerichte grafen*. Het multiple choice blad bevat de aanzet voor deze figuren.
- (b) De relatie R is *niet reflexief*, *niet symmetrisch*, en *niet transitief*. Geef voor elk van deze begrippen aan wat er schort.
- (c) Laat zien dat de relaties $R \circ S$ en $S \circ R$ niet dezelfde zijn.

3. Propositie logica

- (a) Algemene kennis:
- (i) In een formule treden 5 *atomaire proposities* op. Hoeveel regels bevat de (body van de) volledige waarheidstabel?
 - (ii) Wat bedoelt men precies met een *geldige argumentvorm*?
- (b) We bekijken het volgende propositielogische argument.
Als het niet regent, gaan we op stap. Regent het en waait het, dan gaan we niet op stap. Het regent maar het waait niet. $\therefore$ We gaan niet op stap.
Geef een *vertaalsleutel* en een *vertaling* volgens de sleutel.
- (c) Ga na met behulp van waarheidstabellen of het argument uit onderdeel (b) *geldig* is.

4. Predicatenlogica

- (a) In dit onderdeel kijken we naar de zinsvorm
 $\forall x (Dx \rightarrow \exists y (Sy \wedge \neg Vyx))$.
Zet de formule om in goed Nederlands met behulp van de aangegeven vertaalsleutel.
 Dx := "x is een docent".
 Sx := "x is een student".
 Vxy := "x haalt voldoende bij y".
- (b) Gegeven is de volgende evaluatie van het binaire predicaat V uit het vorige onderdeel. Het symbool '+' geeft een voldoende aan.

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3	d_4
anja	+	-	+	+
bart	+	+	+	+
carl	-	+	+	-
dirk	+	+	-	+

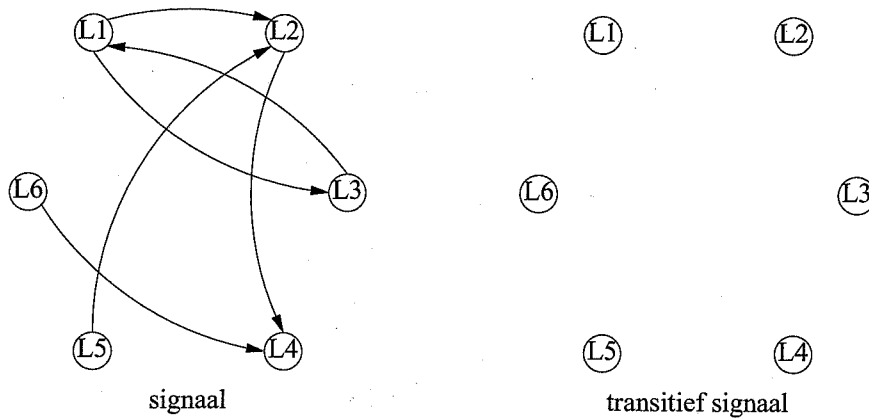
- Is de uitspraak uit (a) onder deze interpretatie waar of onwaar? Graag toelichting.
- (c) (Vervolg van onderdelen (a) en (b)) Geef de waarheidsverzameling bij de open zin
 $Sx \wedge \forall y (Dy \rightarrow Vxy)$.

- (d) Bewijs door de aangegeven argumentvormen aaneen te schakelen.
 $\exists x (Q_1x \vee Q_2x), \quad \forall x (Q_1x \rightarrow Px), \quad \forall x (Q_2x \rightarrow Px), \quad \therefore \exists x Px$
(er-eliminatie regel, al-eliminatie regel, of-eliminatie regel, er-introductie regel).

5. Inductie en Recursie

- (a) Algemene kennis.
- (i) Leg uit: *het principe van (gewone) inductie*. Je mag het antwoord geven in de vorm van een tabel of met woorden.
 - (ii) Gegeven een (binaire) relatie R in een verzameling V , wat bedoelt men met: *de transitieve afsluiting* van R ? Je mag een formule geven of een verbale omschrijving.
- (b) Een rij natuurlijke getallen k_n voor $n \geq 0$ wordt als volgt *recursief gedefinieerd*.
 $k_0 := 1, k_{n+1} := 3 \cdot k_n + 2 \cdot 3^{n+1}$.
- (i) Bereken de termen k_1, k_2, k_3 .

- (ii) Toon aan met (gewone) inductie naar $n \geq 0$ dat $k_n = (2n + 1) \cdot 3^n$.
- (c) In een netwerk met locaties $\{L_1, \dots, L_6\}$ is er een "signaal" relatie S , waar $x S y$ betekent dat een signaal kan worden verstuurd van locatie x rechtstreeks naar locatie y . De relatie S is concreet gegeven in de volgende gerichte graaf. Laat $Strans$ de transitieve afsluiting zijn van S . Vul in het rechterplaatje de gerichte graaf in, die correspondeert met $Strans$.
- N.B.:** Deze figuur is ook opgenomen achterop het multiple choice formulier. Je kan deze voor je antwoord gebruiken.



Normering:

1a	4	2a	5	3a	4	4a	3	5a	4	MC	17
1b	5	2b	5	3b	5	4b	5	5b	5		
1c	5	2c	5	3c	5	4c	3	5c	5		
						4d	5				
14		15		14		16		14		17	

(Multiple-choice gedeelte: -3 punten per fout)

Totaal = 90

Cijfer = Behaald / 10 + 1

N.B.: Na afloop van het tentamen zal een uitwerking op Blackboard worden geplaatst.

Wetten van de verzamelingen algebra

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complement:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

Enkele standaard argumentvormen

naam	argumentvorm	evt. variant	alternatieve naam
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$ $\therefore q$		' $\rightarrow$ ' eliminatie regel
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$ $\therefore \neg p$		
Disjunctieve toevoeging	p $\therefore p \vee q$	q $\therefore p \vee q$	' $\vee$ ' introductie regel
Conjunctieve toevoeging	p, q $\therefore p \wedge q$		' $\wedge$ ' introductie regel
Disjunctief syllogisme	$p \vee q, \neg q$ $\therefore p$	$p \vee q, \neg p$ $\therefore q$	
Dilemma regel	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ $\therefore r$		' $\vee$ ' eliminatie regel
Contradictieregel	$p \rightarrow \perp$ $\therefore \neg p$		' $\neg$ ' introductie regel
Ketenregel	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$		hypothetisch syllogisme
Contrapositieregel	$p \rightarrow q$ $\therefore \neg q \rightarrow \neg p$		
Al introductie	$Z(y)$ $\therefore \forall x Z(x)$	(toelichting weggelaten)	
Er introductie	$Z(y)$ $\therefore \exists x Z(x)$	(toelichting weggelaten)	
Al eliminatie	$\forall x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	(toelichting weggelaten)	
Er eliminatie	$\exists x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	(toelichting weggelaten)	

Leeg blad ten behoeve van apart multiple choice gedeelte

naam, studierichting & jaar:

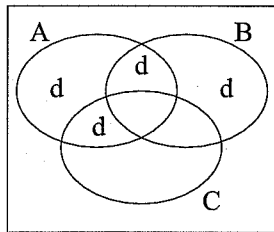
22-02-2012

Multiple-choice gedeelte

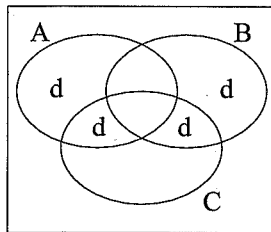
- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M1. Gegeven zijn een element d en drie verzamelingen A, B, C in een universum, waarbij $d \in (A \cap B') \cup (B \cap C')$.

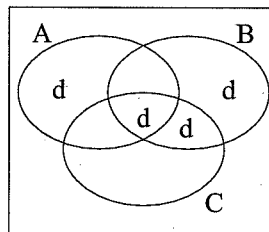
In een Venn-diagram met A, B, C plaatsen we een 'd' in elk vlakdeel waar het element d volgens de formule toe kan behoren. Welke van volgende vier Venn-diagrammen geeft de situatie correct weer.



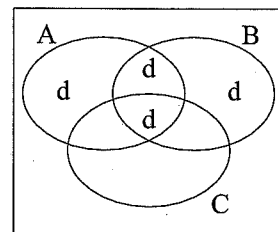
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

- ☐ Figuur 1.
- ☐ Figuur 2.
- ☐ Figuur 3.
- ☐ Figuur 4.

M2. De personenrelatie *IsKleinDochterVan* kan best worden weergegeven als

- ☐ De samenstelling *IsDochterVan* $\circ$ *IsZoonVan*.
- ☐ De samenstelling *IsZoonVan* $\circ$ *IsDochterVan*.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties *IsDochterVan* $\circ$ *IsZoonVan* en *IsDochterVan* $\circ$ *IsDochterVan*.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties *IsZoonVan* $\circ$ *IsDochterVan* en *IsDochterVan* $\circ$ *IsDochterVan*.

M3. Een *contradictie* in de propositielogica is een formule

- ☐ die de logische vorm van een slecht geformuleerde uitspraak weergeeft.
- ☐ van de gedaante $p \rightarrow \neg p$.
- ☐ die onwaar is terwijl de atomaire onderdelen waar zijn.
- ☐ die altijd onwaar is ongeacht de waarheid van de atomaire onderdelen.

M4. Twee formules F en G zijn *logisch equivalent* in de propositielogica als

- ☐ F en G op de volgorde van de atomaire proposities na dezelfde zijn.
- ☐ F en G op de plaatsing van de haakjes na dezelfde zijn.
- ☐ de waarheidstabellen van F en G dezelfde zijn.
- ☐ F en G een gelijkkluidende interpretatie hebben in omgangstaal.

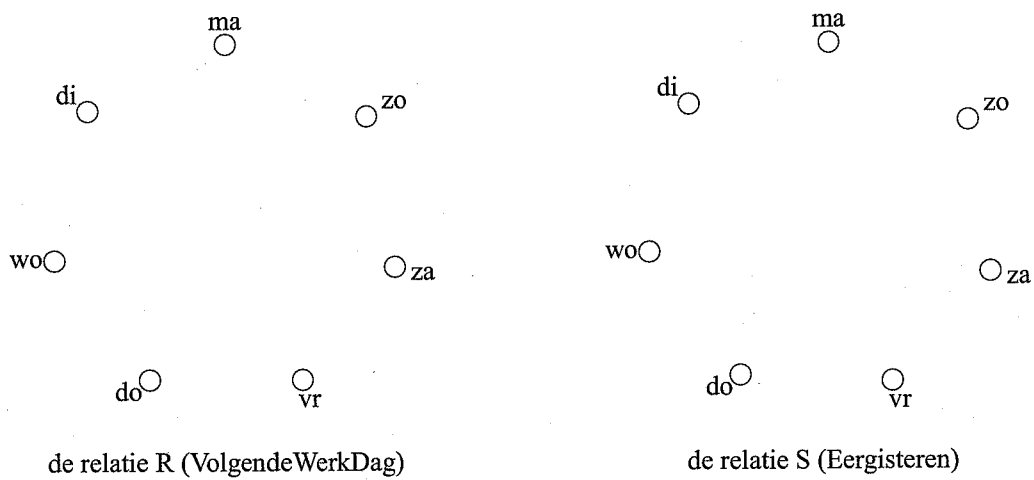
M5. De formule $\forall x(Px \vee Qx)$ is *logisch equivalent* met:

- ☐ $\forall xPx \vee \forall xQx$.
- ☐ $\forall xPx \wedge \forall xQx$.
- ☐ $\forall x(\neg Px \rightarrow Qx)$.

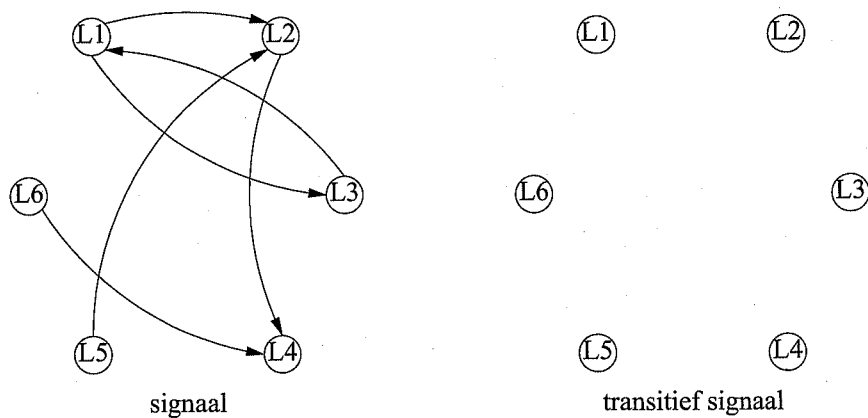
- o -- (geen van deze).

M6. Een rij getallen $(f(n))_{n=0}^{\infty}$ wordt gesuggereerd door 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Een *recursief voorschrift* voor deze rij is als volgt: $f(0) := 1$ en $f(1) := 1$ (basis) en verder:

- o $f(n+2) := f(n+1) + f(n)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
- o $f(n) := f(n+1) + f(n+2)$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
- o $f(n+2) := f(n+1) + n$ voor alle $n \in \mathbb{N}$.
- o (..) de gesuggereerde rij heeft geen recursief voorschrift.



Figuur bij vraag 2(a)



Figuur bij opgave 5(c): Transitieve afsluiting.