

Opgelet: er is een *apart multiple-choice gedeelte* op de laatste bladzijde. Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!

1. Verzamelingen

- (a) Gegeven zijn drie verzamelingen A, B, C in een universum van 28 elementen. Verder is gegeven dat

$$\#A = \#B = \#C = 12,$$

$$\#(A \cap B) = \#(B \cap C) = \#(C \cap A) = 4,$$

$$\#(A \cap B \cap C) = 1.$$

Bepaal de volgende aantallen met behulp van *Venn-diagrammen*:

$$\#(A \cup B \cup C), \#(U \setminus (A \cup B \cup C)), \#(U \setminus (B \cup C)).$$

- (b) Maak een *Venn-diagram* voor elk van de twee hieronder opgegeven formules en geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee verzamelingen gelijk?

$$A \cap (B \cup C)', \quad (A \cap B') \cap (A \cap C').$$

- (c) Controleer de gelijkheid met behulp van de wetten van *verzamelingen-algebra*. Geef daarbij aan waar de *vervangingsregel* werd gebruikt. **N.B.:** na de normering vind je een tabel met wetten uit de verzamelingenalgebra.

$$(A \cap B)' \cap (A \cap C)' = A' \cup (B \cup C)'.$$

2. Relaties

In deze opgave vatten we een datum op als een element uit het Cartesisch product

$$\text{Dagnummers} \times \text{Maandnummers} \times \text{Jaartallen},$$

waarbij de factoren als volgt gedefinieerd zijn.

$$\text{Dagnummers} := \{01, 02, \dots, 31\},$$

$$\text{Maandnummers} := \{01, 02, \dots, 12\},$$

$$\text{Jaartallen} := \{x : 2000 \leq x\}.$$

De verzameling *Data* bestaat uit alle werkelijk voorkomende data. Beschouw een binaire relatie *Termijn* die alle datumparen $\langle d_1, d_2 \rangle$ uit *Data* bevat met $d_1 \leq d_2$ (d.w.z.: datum d_1 komt voor d_2 of is er aan gelijk) en het datumverschil $d_2 - d_1$ is ten hoogste 14 dagen.

- (a) Voor welke van de volgende datumparen $\langle x, y \rangle$ geldt dat $\langle x, y \rangle \in \text{Termijn}$?

$$x = \langle 08, 10, 2010 \rangle, y = \langle 20, 09, 2010 \rangle;$$

$$x = \langle 10, 10, 2010 \rangle, y = \langle 25, 10, 2010 \rangle;$$

$$x = \langle 10, 11, 2010 \rangle, y = \langle 20, 11, 2010 \rangle.$$

- (b) Is de relatie *Termijn* reflexief? Symmetrisch? Antisymmetrisch? Transitief?
(c) Wat betekent de relatie $\text{Termijn} \circ \text{Termijn}$?

3. Propositielogica

- (a) Onderzoek met behulp van *waarheidstabellen* of de logische vormen

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \quad \text{en} \quad (p \vee q) \rightarrow r$$

logisch equivalent zijn.

- (b) Reken na met behulp van *propositie-algebra* dat de volgende formules logisch equivalent zijn:

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \quad \text{en} \quad (p \vee q) \rightarrow r.$$

N.B.: je vindt een tabel met de wetten van de propositielogica na de normering.

- (c) Bepaal de *argumentvorm* met een *vertaalsleutel* en onderzoek vervolgens de geldigheid met behulp van een waarheidstabel:

Als het vriest, kunnen we schaatsen. Vriest het niet of is het ijs ruw, kunnen we niet schaatsen. Het ijs is niet ruw. $\therefore$ We kunnen schaatsen.

4. Predicatenlogica

- (a) *Vertaal* de zin met behulp van de aangereikte vertaalsleutel.

"Al wie geen vijanden heeft, is een gelukkig mens"

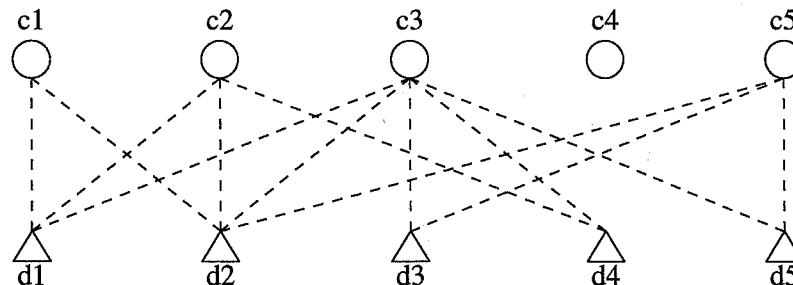
Vertaalsleutel:

$V(x,y) := x$ heeft y tot vijand

$Gx := x$ is een gelukkig mens

- (b) (Cf. opgave 5:H31(b)) In een universum van cirkels en driehoeken, zijn sommige figuren door een rechte stippellijn verbonden. We *interpreteren*

$Vxy := "x$ en y zijn verbonden met een rechte stippellijn".



Figuur bij opgave 4(b)

Bijvoorbeeld is $V(c_1, d_2)$ geldig maar $V(c_1, c_2)$ niet. We gebruiken in dit onderdeel de verzamelingen C van cirkels en D van driehoeken. Vul de tabel aan. **N.B.:** je mag ook gebruik maken van de tabel na de multiple choice vraagstukken.

formule:	waar of onwaar
$\forall y \in D \exists x \in C Vxy$	
$\exists x \in C \forall y \in D Vxy$	
$\forall x \in C \exists y \in D Vxy$	
$\exists y \in D \forall x \in C Vxy$	

- (c) De hierna gegeven argumentvorm is ongeldig. Geef de fout aan via een interpretatie in een "klein" universum. (P, Q, R zijn drie unaire predicaatsymbolen.)

$$\begin{aligned} &\exists x (P x \wedge Q x), \\ &\exists x (Q x \wedge R x), \\ &\exists x (P x \wedge R x), \\ &\therefore \exists x (P x \wedge Q x \wedge R x). \end{aligned}$$

(d) Laat zien dat het volgende argument geldig is door aaneenschakelen van standaard argumenten.

$$\begin{aligned} &\forall x (P x \vee Q x) \\ &\exists x \neg Q x \\ &\therefore \exists x P x \end{aligned}$$

N.B.: Een tabel met standaard argumenten uit propositie- en predicaatenlogica is opgenomen na de normering.

5. Inductie en Recursie

(a) Het sorteeralgoritme *Bubblesort* heeft voor n items maximaal t_n sorteerstappen nodig om ze op orde te krijgen. De rij getallen $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ blijkt te voldoen aan de volgende *recurrente betrekking*:

$$t_1 = 0; \quad t_{n+1} = t_n + n \quad (n \geq 1).$$

- (i) Bereken de termen tot en met t_6 van de rij $(t_n)_{n=1}^{\infty}$.
(ii) Bewijs met *inductie* dat

$$t_n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \quad (n \geq 1).$$

(b) In de verzameling $W := \{ma, di, \dots, zo\}$ van weekdays hebben we een binaire relatie

$$Morgen := \{ \langle ma, di \rangle, \langle di, wo \rangle, \langle wo, do \rangle, \langle do, vr \rangle, \langle vr, za \rangle, \langle za, zo \rangle, \langle zo, ma \rangle \}.$$

(7 paren).

- (i) Teken de *gerichte graaf* van de relaties

$$Morgen,$$

$$Morgen^2 := Morgen \circ Morgen,$$

$$Morgen^3 := Morgen \circ Morgen \circ Morgen.$$

- (ii) Wat is de *transitieve afsluiting* van R (weergave naar eigen smaak)?

Normering:

1a	5	2a	3	3a	5	4a	3	5a	5	MC	20
1b	5	2b	6	3b	5	4b	3	5b	7		
1c	5	2c	3	3c	5	4c	5				
						4d	5				
	15		12		15		16		12		20

Voor het multiple choice gedeelte geldt: -3ptn per fout antwoord.

Totaal op 90

Cijfer = Behaald/10 + 1

Het cijfer wordt nadien aangevuld met de behaalde huiswerkbonus.

Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard (Knop "Kursus informatie"). De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Wetten van de verzamelingen algebra

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complement:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

Vervangingsregel: [informatie gewist]

Tabel 1: Wetten van de verzamelingen-algebra

Wetten van de propositie algebra

Commutatieve wetten:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

Associatieve wetten:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge r$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee r$$

Distributieve wetten:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Identiteitswetten:

$$p \vee \top \equiv \top \text{ en } p \vee \perp \equiv p$$

$$p \wedge \top \equiv p \text{ en } p \wedge \perp \equiv \perp$$

Idempotentie:

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

Negatie:

$$p \vee \neg p \equiv \top$$

$$p \wedge \neg p \equiv \perp$$

DeMorgan's wetten:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Involutie:

$$\neg \neg p \equiv p$$

Vervangingsregel: [informatie gewist]

Tabel 8: Wetten van de propositie-algebra

Omzetting van implicatie en dubbele implicatie

($\rightarrow$ omzetten in $\vee$ en $\neg$)

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

(negatie van een implicatie)

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

($\leftrightarrow$ omzetten in $\wedge$, $\vee$, en $\neg$)

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

(Contrapositie)

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Tabel 9: Omzetting van (dubbele) implicatie

Enkele standaard argumentvormen

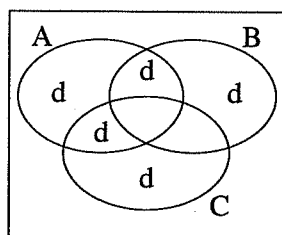
naam	argumentvorm	evt. variant	alternatieve naam
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$ $\therefore q$		' $\rightarrow$ ' eliminatie regel
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$ $\therefore \neg p$		
Disjunctief syllogisme	$p \vee q, \neg q$ $\therefore p$	$p \vee q, \neg p$ $\therefore q$	
Dilemma regel	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ $\therefore r$		' $\vee$ ' eliminatie regel
Contradictieregel	$p \rightarrow \perp$ $\therefore \neg p$		' $\neg$ ' introductie regel
Ketenregel	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$		hypothetisch syllogisme
Contrapositieregel	$p \rightarrow q$ $\therefore \neg q \rightarrow \neg p$		
Al introductie	$Z(y)$ $\therefore \forall x Z(x)$	[toelichting weggelaten]	
Er introductie	$Z(y)$ $\therefore \exists x Z(x)$	[toelichting weggelaten]	
Al eliminatie	$\forall x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	[toelichting weggelaten]	
Er eliminatie	$\exists x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	[toelichting weggelaten]	

6. Multiple-choice gedeelte

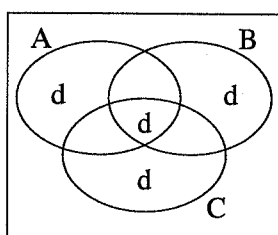
- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M1. Gegeven is een element d en drie verzamelingen A, B, C in een universum, waarbij $d \in A \cap (B' \cup C')$.

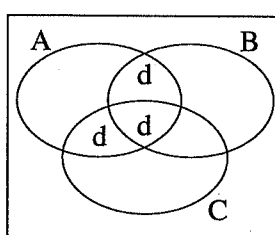
In een Venn-diagram met A, B, C plaatsen we een 'd' in elk vlakdeel waar het element d volgens gegeven toe kan behoren. Welke van de volgende vier Venn-diagrammen geeft de situatie correct weer.



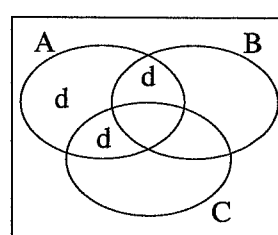
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

- ☐ Figuur 1.
- ☐ Figuur 2.
- ☐ Figuur 3.
- ☐ Figuur 4.

M2. De relatie *IsOomVan* wordt het beste weergegeven door de samengestelde relatie

- ☐ *IsOuderVan* $\circ$ *IsBroerVan*.
- ☐ *IsBroerVan* $\circ$ *IsOuderVan*.
- ☐ *IsVaderVan* $\circ$ *IsBroerOfZusVan*.
- ☐ *IsBroerOfZusVan* $\circ$ *IsVaderVan*.

M3. Neem de zin

"De tijd duurt lang als je je verveelt, maar als je je amuseert gaat de tijd snel voorbij."

Welke formule komt het meest in aanmerking als de logische vorm van deze zin?

- ☐ $(l \wedge v) \vee (a \wedge s)$.
- ☐ $(v \rightarrow l) \vee (a \rightarrow s)$.
- ☐ $(v \rightarrow l) \wedge (a \rightarrow s)$.
- ☐ $(l \wedge v) \wedge (a \wedge s)$.

M4. Welke van de volgende vier waarheidstabellen evalueert de formule $p \vee q \rightarrow \neg q$ juist:

p	q	$p \vee q \rightarrow \neg q$	$p \vee q \rightarrow \neg q$	$p \vee q \rightarrow \neg q$	$p \vee q \rightarrow \neg q$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
		Tabel 1	Tabel 2	Tabel 3	Tabel 4

- ☐ Tabel 1.
- ☐ Tabel 2.
- ☐ Tabel 3.
- ☐ Tabel 4.

M5. De formule $\neg \exists x (Px \wedge Qx)$ is *logisch equivalent* met:

- o $\exists x (\neg Px \wedge \neg Qx)$.
- o $\exists x \neg Px \wedge \exists x \neg Qx$.
- o $\forall x \neg Px \vee \forall x \neg Qx$.
- o $\forall x (\neg Px \vee \neg Qx)$.

M6 We willen het argument van er-eliminatie toepassen op de formule $\exists x \exists y P(x,y)$: eerst op $\exists x$, dan op $\exists y$. Welk resultaat is toegestaan:

- o $P(x,y)$.
- o $P(u, v)$, waar u, v nieuwe, beperkte variabelen zijn.
- o $P(u,u)$, met u een nieuwe, beperkte variabele.
- o (--) Je weet niet of je het argument van er-eliminatie mag toepassen, want mogelijk zijn x, y beperkt.

M7. Een rij getallen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ is *recursief gedefinieerd* door $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := -a_n + (-1)^{n+1} \cdot 2$ ($n \geq 0$). De eerste vijf elementen van de rij zijn:

- o 1, 3, -5, 7, -9.
- o 1, -3, 5, -7, 9.
- o 1, -1, 1, -1, 1.
- o (...) dit is geen recursief voorschrift; er ontstaat geen rij.

formule:	waar of onwaar
$\forall y \in D \exists x \in C Vxy$	
$\exists x \in C \forall y \in D Vxy$	
$\forall x \in C \exists y \in D Vxy$	
$\exists y \in D \forall x \in C Vxy$	

Antwoordtabel bij opgave 4(b)