

## 1. Verzamelingen

- (a) Venn-diagrammen en aantallen. Gegeven zijn drie verzamelingen  $A, B, C$ , waarbij  $\#A = 9$ ,  $\#B = 8$ ,  $\#C = 7$ . Verder is gegeven dat het universum  $U$  18 elementen heeft en dat

$$\#(A \cap B \cap C) = 1,$$

$$\#(A \cap B) = 4; \#(B \cap C) = 2; \#(C \cap A) = 3.$$

Bepaal de volgende aantallen met behulp van Venn-diagrammen:

$$\#(A \cap (B \cup C)), \#(A' \cap B' \cap C'), \#(U \setminus (B \cup C)).$$

- (b) Controleer de gelijkheid met behulp van verzamelingenalgebra. Geef daarbij aan welke wetten je gebruikt en waar je de *vervangingsregel* gebruikt. Het universum is  $U$ .

$$(A \cup B)' \cup (A \cup C)' = A' \cap (B \cap C)'.$$

**N.B.:** je vindt een tabel met de wetten van verzamelingenalgebra na de normering.

## 2. Relaties

- (a) Algemene kennis.

- (i) Gegeven een binaire relatie  $R$ , wat betekent het dat  $x(R^{-1})y$ ? Geef een precies antwoord.
- (ii) Gegeven twee binaire relaties  $R, S$ , wat betekent het dat  $x(S \circ R)z$ ? Geef een precies antwoord.
- (iii) Gegeven een relatie  $R$  in de verzameling  $\{1, 2, 3, 4\}$ , wat wordt bedoeld met een *matrix-voorstelling* van  $R$ ?

Voor de rest van deze opgave bekijken we twee relaties, *Recht* en *Schuin*, op een spelbord met vakken. Elk vak heeft twee coördinaten  $\langle x, y \rangle$  met  $x, y \in \mathbb{Z}$  (het bord strekt zich dus in alle richtingen oneindig ver uit; er is geen "rand"). De relaties zijn als volgt:

- Relatievoorschrift  $\langle x_1, x_2 \rangle \text{ Recht } \langle y_1, y_2 \rangle$ :  
 $y_1 = x_1 \pm 1$  en  $y_2 = x_2$ , of,  $y_1 = x_1$  en  $y_2 = x_2 \pm 1$ .  
 Bijvoorbeeld,  $\langle 3, 4 \rangle \text{ Recht } \langle 3, 5 \rangle$  want:  $3=3$  en  $4=5-1$ .  
 (Deze relatie imiteert één stap vooruit, achteruit, naar links of naar rechts).
- Relatievoorschrift  $\langle x_1, x_2 \rangle \text{ Schuin } \langle y_1, y_2 \rangle$ :  
 $y_1 - x_1 = \pm(y_2 - x_2)$ .  
 Bijvoorbeeld,  $\langle 3, 4 \rangle \text{ Schuin } \langle 2, 5 \rangle$  want  $2-3 = -(5-4)$ .  
 (Deze relatie imiteert een willekeurig grote stap in een schuine richting).

- (b) Geef aan met "ja" of "nee; toelichting hoeft niet. **N.B.:** voor je antwoord mag je ook een kopie van de tabel gebruiken achteraan het multiple-choice gedeelte.

| relatie:      | reflexief? | symmetrisch? | transitief? |
|---------------|------------|--------------|-------------|
| <i>Recht</i>  |            |              |             |
| <i>Schuin</i> |            |              |             |

- (c) In de kolommen van de volgende tabel wordt een samengestelde relatie genoemd. Op de rijen

worden twee vakken van het spelbord (twee paren coördinaten) genoemd. Geef bij elke combinatie vakken / relatie een antwoord ("ja" of "nee") op de vraag: staat het vakkenpaar in de relatie?

| vakken                                             | <i>Recht o Recht</i> | <i>Schuin o Recht</i> |
|----------------------------------------------------|----------------------|-----------------------|
| $\langle 0, 0 \rangle$ met $\langle 1, 2 \rangle$  |                      |                       |
| $\langle 0, 0 \rangle$ met $\langle -1, 1 \rangle$ |                      |                       |

**N.B.:** voor je antwoord mag je ook een kopie van de tabel gebruiken achteraan het multiple-choice gedeelte.

### 3. Propositielogica: Taal en Waarheid

- (a) Ontbind de volgende uitspraak in *atomaire deeluitspraken*, geef deze een naam, en geef daarmee de *logische vorm* van het geheel weer. Gebruik precies voldoende haakjes.

"Je let op, of je raakt de draad kwijt en je begrijpt het verhaal niet"

- (b) *Logische equivalentie*. Controleer met een *waarheidstabel* of de volgende twee proposities logisch equivalent zijn:

$$p \vee (q \rightarrow r), \quad (p \vee q) \rightarrow (p \vee r).$$

- (c) *Propositiealgebra*. Geef bij elke stap in je berekening aan welke wetten van de propositie algebra je gebruikt. **N.B.:** je vindt een tabel met de wetten van propositiealgebra na de normering.

- (i) Werk de volgende formule uit en vereenvoudig zoveel mogelijk.

$$(p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q).$$

- (ii) Controleer de volgende logische equivalentie.

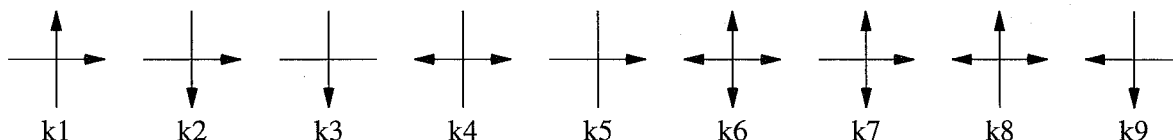
$$p \wedge (p \rightarrow q) \equiv p \wedge q.$$

- (d) Controleer met de methode van *waarheidstabellen* dat het volgende *argument* geldig is.

$$\left\{ \begin{array}{l} p \vee q \rightarrow r \\ \therefore q \rightarrow r. \end{array} \right.$$

### 4. Predicatenlogica

- (a) *Situatie-logica*. Gegeven is een universum van kruisen waarvan sommige armen een pijlpunt hebben en andere niet. Laat  $Bx$ ,  $Ox$ ,  $Lx$  en  $Rx$  respectievelijk uitdrukken dat  $x$  een pijl naar boven, onder, links en rechts heeft.



- (i) Geef de waarheidsverzameling van de open zin  $\neg Bx \wedge \neg Ox$

- (ii) Geef de interpretatie in vlot en correct Nederlands:  $\forall x (Lx \rightarrow \neg Bx \wedge \neg Ox)$ .

Voor de rest van deze opgave is gegeven de volgende argumentvorm.

$$\forall x (Wx \rightarrow Bx \vee Dx),$$

$$\forall x (Bx \rightarrow V),$$

$$\forall x (Dx \rightarrow V),$$

$\exists x Wx$ .

$\therefore V$ .

- (b) Geef een verbale *interpretatie* aan de hand van de volgende sleutel.  
 $Wx :=$  "x is een wagen",  
 $Bx :=$  "x rijdt op benzine",  
 $Dx :=$  "x rijdt op diesel",  
 $V :=$  "de lucht wordt verontreinigd" (geen vrije variabele).
- (c) Nummer de premissen (1)-(4) zoals opgesomd. Laat zien dat het argument geldig is door aanschakelen van standaard argumenten. **N.B.:** je kan gebruik maken van de tabel met standaard argumentvormen na de normering.

## 5. Inductie en Recursie

- (a) Rijen. Een rij reële getallen  $(t_n)_{n=2}^{\infty}$  is als volgt recursief gedefiniëerd.

$$t_1 := 1; \quad t_{n+1} := 2t_n + n + 1 \quad (n \geq 1).$$

- (i) Bepaal de termen  $t_2$  t/m  $t_6$  van de rij  $(t_n)_{n=2}^{\infty}$ .  
(ii) Bewijs dat  $t_n = 2^{n+1} - n - 2$  voor alle  $n \geq 1$ .

- (b) Transitieve afsluiting. Gegeven is een verzameling  $A$  met 5 punten en een binaire relatie  $R$  in  $A$  (in matrixvorm):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Geef de transitieve afsluiting van  $R$  in je favoriete weergave (matrixweergave, tabel of gerichte graaf). Goede toelichting scoort.

## Normering:

|       |    |       |    |       |    |       |    |       |    |       |    |
|-------|----|-------|----|-------|----|-------|----|-------|----|-------|----|
| 1a    | 6  | 2a    | 3  | 3a    | 3  | 4a    | 4  | 5a    | 6  | MC    | 22 |
| 1b    | 6  | 2b    | 6  | 3b    | 5  | 4b    | 6  | 5b    | 6  |       |    |
|       |    | 2c    | 3  | 3c    | 4  | 4c    | 6  |       |    |       |    |
|       |    |       |    | 3d    | 4  |       |    |       |    |       |    |
| <hr/> |    | <hr/> |    | <hr/> |    | <hr/> |    | <hr/> |    | <hr/> |    |
|       | 12 |       | 12 |       | 16 |       | 16 |       | 12 |       | 22 |

(Multiple-choice gedeelte: -4 punten per fout)

**Totaal = 90**

**Cijfer = Behaald / 10 + 1**

## Wetten van de verzamelingen algebra

*Commutativiteit:*

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

*Associativiteit:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

*Distributiviteit:*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

*Identiteiten:*

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

*Idempotentie:*

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

*Complement:*

$$1: A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

*DeMorgan's wetten:*

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

*Involutie:*

$$(A')' = A$$

*Vervangingsregel:* [informatie gewist]

## Wetten van de propositie algebra

*Commutatieve wetten:*

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

*Associatieve wetten:*

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

*Distributieve wetten:*

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

*Identiteitswetten:*

$$p \vee \top \equiv \top \text{ en } p \vee \perp \equiv p$$

$$p \wedge \top \equiv p \text{ en } p \wedge \perp \equiv \perp$$

*Idempotentie:*

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

*Negatie:*

$$p \vee \neg p \equiv \top$$

$$p \wedge \neg p \equiv \perp$$

*DeMorgan's wetten:*

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

*Involutie:*

$$\neg \neg p \equiv p$$

*Vervangingsregel:* [informatie gewist]

Tabel 8: Wetten van de propositie-algebra

### Omzetting van implicatie en dubbele implicatie

( $\rightarrow$  omzetten in  $\vee$  en  $\neg$ )

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

(negatie van een implicatie)

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

( $\leftrightarrow$  omzetten in  $\wedge$ ,  $\vee$ , en  $\neg$ )

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

(Contrapositie)

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Tabel 9: Omzetting van (dubbele) implicatie

## Enkele standaard argumentvormen

| naam                          | argumentvorm                                                       | evt. variant                         | alternatieve naam                  |
|-------------------------------|--------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| <b>Modus Ponens</b>           | $p \rightarrow q, p$<br>$\therefore q$                             |                                      | ' $\rightarrow$ ' eliminatie regel |
| <b>Modus Tollens</b>          | $p \rightarrow q, \neg q$<br>$\therefore \neg p$                   |                                      |                                    |
| <b>Disjunctief syllogisme</b> | $p \vee q, \neg q$<br>$\therefore p$                               | $p \vee q, \neg p$<br>$\therefore q$ |                                    |
| <b>Dilemma regel</b>          | $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$<br>$\therefore r$     |                                      | ' $\vee$ ' eliminatie regel        |
| <b>Contradictieregel</b>      | $p \rightarrow \perp$<br>$\therefore \neg p$                       |                                      | ' $\neg$ ' introductie regel       |
| <b>Ketenregel</b>             | $p \rightarrow q, q \rightarrow r$<br>$\therefore p \rightarrow r$ |                                      | hypothetisch syllogisme            |
| <b>Contrapositieregel</b>     | $p \rightarrow q$<br>$\therefore \neg q \rightarrow \neg p$        |                                      |                                    |
| <b>Al introductie</b>         | $Z(y)$<br>$\therefore \forall x Z(x)$                              | (toelichting weggelaten)             |                                    |
| <b>Er introductie</b>         | $Z(y)$<br>$\therefore \exists x Z(x)$                              | (toelichting weggelaten)             |                                    |
| <b>Al eliminatie</b>          | $\forall x Z(x)$<br>$\therefore Z(y)$                              | (toelichting weggelaten)             |                                    |
| <b>Er eliminatie</b>          | $\exists x Z(x)$<br>$\therefore Z(y)$                              | (toelichting weggelaten)             |                                    |

naam, studierichting & jaar:

18-02-2010

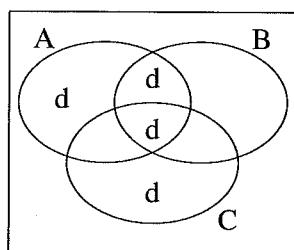
## Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

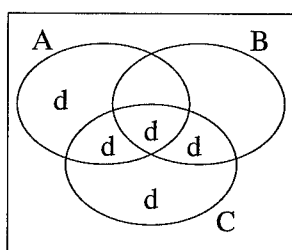
**M1.** Gegeven zijn een element  $d$  en drie verzamelingen  $A, B, C$  in een universum, waarbij

$$d \in (A \cap B) \cup C.$$

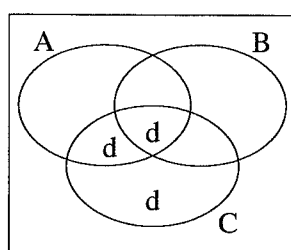
In een Venn-diagram met  $A, B, C$  plaatsen we een 'd' in elk vlakdeel waar het element  $d$  volgens de formule toe kan behoren. Welke van de volgende vier Venn-diagrammen geeft de situatie correct weer:



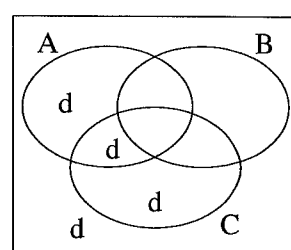
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

- ☐ Figuur 1.
- ☐ Figuur 2.
- ☐ Figuur 3.
- ☐ Figuur 4.

**M2.**  $R$  en  $S$  zijn binaire relaties. De formule  $R \circ S$  voor een *samengestelde relatie* betekent:

- ☐ Eerst  $R$ , vervolgens  $S$ .
- ☐ Eerst  $S$ , vervolgens  $R$ .
- ☐  $R$  en  $S$  samengesteld; de volgorde van samenstelling maakt niet uit.
- ☐  $R$  voor  $S$  of  $R$  na  $S$ , naargelang je van links naar rechts of van rechts naar links leest.

**M3.** Iemand produceert de volgende twee *evaluaties* van de formule  $p \wedge \neg q \rightarrow r$ :

| nr. | $p$ | $q$ | $r$ | $p \wedge \neg q$ | $\rightarrow$ | $r$ |
|-----|-----|-----|-----|-------------------|---------------|-----|
| 1.  | 1   | 0   | 0   |                   | 0             |     |
| 2.  | 1   | 1   | ?   |                   | 1             |     |

- ☐ Beide evaluaties zijn fout.
- ☐ De eerste evaluatie is fout, de tweede is juist.
- ☐ De eerste evaluatie is juist, de tweede is fout of op z'n minst voorbarig.
- ☐ Beide evaluaties zijn juist.

**M4.** Twee keer het argument van *er-eliminatie* toepassen op de formule  $\exists x \exists y P(x, y)$  levert:

- ☐  $P(c, d)$ , waar  $c, d$  twee verschillende constanten zijn.
- ☐  $P(u, u)$ , met  $u$  een nieuwe, beperkte variabele.
- ☐  $P(u, v)$  met  $u, v$  nieuwe, beperkte variabelen.
- ☐ (--) Je weet niet of je het argument van er-eliminatie mag toepassen, want mogelijk zijn  $x, y$  beperkt.

**M5.** De argumentvorm van het volgende concrete argument is een van de *standaardargumenten*. Wat is de precieze naam daarvan?

*Ben je handig, dan vind je goedbetaald werk. Ben je verstandig, dan vind je goedbetaald werk. Je bent handig of verstandig.  $\therefore$  Je vindt goedbetaald werk.*

- ☐ Disjunctief Syllogisme.
- ☐ Disjunctieve toevoeging.
- ☐ Dilemma regel.
- ☐ Modus Tollens.

**M6.** Gegeven is de volgende relatie in  $\mathbb{N}$ :

$$R := \{ \langle x, x+1 \rangle : x \in \mathbb{N} \}.$$

De *transitieve afsluiting* van  $R$  is de relatie

- ☐  $\{ \langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{N}, x < y \}.$
- ☐  $\{ \langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{N}, x \leq y \}.$
- ☐  $\{ \langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{N}, y = x + 2 \}.$
- ☐  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  (de “volle” relatie).

Antwoordtabel bij opgave 2(b):

| relatie:      | reflexief? | symmetrisch? | transitief? |
|---------------|------------|--------------|-------------|
| <i>Recht</i>  |            |              |             |
| <i>Schuin</i> |            |              |             |

Antwoordtabel bij opgave 2(c):

| vakken                                             | <i>Recht</i> $\circ$ <i>Recht</i> | <i>Schuin</i> $\circ$ <i>Recht</i> |
|----------------------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------|
| $\langle 0, 0 \rangle$ met $\langle 1, 2 \rangle$  |                                   |                                    |
| $\langle 0, 0 \rangle$ met $\langle -1, 1 \rangle$ |                                   |                                    |