

Opgelet: er is een *apart multiple-choice gedeelte* op de laatste bladzijde. Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!

1. Verzamelingen

(a) (Algemene kennis)

(i) Wat is de *vereniging* $A \cup B$ van twee verzamelingen A en B ?

(ii) Wat is het *symmetrisch verschil* $A \Delta B$ van twee verzamelingen A en B ?

(b) Maak een *Venn-diagram* voor elk van de twee opgegeven formules en geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee verzamelingen gelijk?

$$A \cap (B \cup C)', \quad (A \cap B') \cap (A \cap C').$$

(c) Controleer de gelijkheid met behulp van de wetten van *verzamelingen-algebra*. Geef daarbij aan waar de *vervangingsregel* werd gebruikt. N.B.: na de normering vind je een tabel met wetten uit de verzamelingenalgebra.

$$(A \cap B)' \cap (A \cap C)' = A' \cup (B \cup C)'.$$

2. Relaties

We beschikken over de volgende binaire relatie R in de verzameling $V := \{1, 2, 3, 4\}$:

$$R := \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 4, 1 \rangle \}.$$

(a) Geef de *matrixvoorstelling* van R (rij- en kolomnummers moeten overeenstemmen met de volgorde 1, 2, 3, 4 van de elementen van V).

(b) Geef de *inverse relatie* R^{-1} weer door opsomming.

(c) Teken de *gerichte graaf* van de samengestelde relatie $S := R \circ R$.

(d) Is de relatie S reflexief? Symmetrisch? Antisymmetrisch? Transitief? Toelichting hoeft niet; antwoorden met "ja" of "nee" volstaan.

3. Propositielogica

(a) (Algemene kennis)

(i) Prioriteitsregels. Je bedoelt $(p \vee q) \rightarrow r$. Mag je dan schrijven: $p \vee q \rightarrow r$? Je bedoelt $p \vee (q \rightarrow r)$. Mag je dan schrijven: $p \vee q \rightarrow r$? (Twee antwoorden; toelichting scoort beter).

(ii) Vul aan: een logische vorm is een *tautogie* als

(iii) Wat is een geldige *argumentvorm* in de propositielogica? Je mag als antwoord geven: ofwel de definitie, ofwel de procedure die gevolgd wordt om geldigheid te verifiëren.

(b) Laat zien door middel van (een regel van) een *waarheidstabel* dat de formules

$$p \wedge q \rightarrow r, \quad (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

niet *logisch equivalent* zijn.

(c) Laat zien door middel van *propositiealgebra* dat de formules

$$p \vee q \rightarrow r, (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

logisch equivalent zijn. Begin met de implicaties om te zetten in de benodigde voegwoorden " $\neg$ ", " $\vee$ ", " $\wedge$ ". Geef bij de daarop volgende stappen telkens aan welke wet je gebruikt uit de propositie-algebra. N.B.: na de normering vind je een tabel met wetten uit de propositiealgebra.

Voor de rest van deze opgave bekijken we het volgende argument.

Als je reist, dan ga je met de trein of met de wagen. Ga je met de trein, dan ben je milieubewust. Ga je met de wagen, dan ben je niet milieubewust. Je bent milieubewust. Je reist. $\therefore$ Je gaat met de trein.

Let op: er zijn vier atomaire uitspraken aanwezig.

- (d) Geef een *vertaalsleutel* en geef daarmee de *argumentvorm* weer.
 (e) Het gegeven argument is geldig: verifieer dit met een *aaneenschakeling van standaard argumenten*. Zijn er ongebruikte premissen? N.B.: na de normering vind je een tabel met standaard argumentvormen.

4. Predicatenlogica

(a) (Algemene kennis)

(i) Wat bedoelt men met een *vrije variabele*?

(ii) Maak de definitie af:

$\forall x \in A Px$ betekent $\forall x (x \in A \dots\dots Px)$

$\exists x \in A Px$ betekent $\exists x (x \in A \dots\dots Px)$

(iii) De regel van $\exists$ -eliminatie ziet er zo uit:

$\exists x Z(x) \therefore Z(y)$.

Welke twee punten moet je in acht nemen m.b.t. de variabele y ?

(b) Geef aan met ja of nee of de zin waar is in het gegeven universum.

Universum		$\exists x 2 \cdot x = 10$	$\exists x x^2 = 25$
$\mathbb{Z}$	Gehele getallen		
$2\mathbb{Z}$	Even getallen		
$2\mathbb{Z} + 1$	Oneven getallen		
$5\mathbb{Z}$	Vijfvouden		

(c) In een universum van personen en fruitsoorten hebben we de volgende relatietabel voor het binaire predicaat L .

$Lxy :=$ "persoon x lust fruit(soort) y ".

$x \backslash y$	appel	banaan	kiwi	peer	$\exists y \in F L(x, y)$
ann	F	T	T	T	
bart	F	F	F	T	
carl	F	T	T	F	
$\forall x \in P L(x, y)$					

We gebruiken P voor de verzameling van de genoemde personen en F voor de verzameling van de genoemde fruitsoorten.

(i) Evalueer de lege plaatsen in de tabel. N.B.: Achteraan de multiple-choice vraagstukken staat een kopie van deze tabel. Je mag deze gebruiken om je antwoorden in te vullen.

- (ii) Geef een vlote vertaling van de (gesloten) zin $\forall x \in P \exists y \in F L(x, y)$ en geef aan of deze zin waar is of niet onder de gegeven interpretatie.
- (d) Bewijs door enkele standaard argumentvormen aan elkaar te schakelen, N.B.: een lijst van standaardargumenten in propositie- en predicaatlogica vind je na de normering.
- $\forall x (P_1(x) \vee P_2(x)), \exists x \neg P_1(x), \therefore \exists x P_2(x).$

5. Inductie en Recursie

- (a) Algemene kennis:
- (i) Het *principe van inductie* zet een gegeven probleem ("beginargument") om in een of meer andere problemen ("werkargumenten"), die vaak eenvoudiger op te lossen zijn. Maak het schema af met de benodigde werkargumenten:

	Premissen:	Doel:
Beginargument:	<lijst van rekenregels>	$\forall n \in \mathbb{N} P(n)$
Werkargument:		
....		

- (ii) Wat is (losjes gesproken) het verschil tussen de gewone en de sterke inductie?
- (b) Voor het verplaatsen van n schijven volgens de regels van het spel *Torens van Hanoi* zijn minimaal t_n handelingen nodig. De recurrente betrekking voor de getallenrij $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ blijkt te zijn

$$t_1 = 1; \quad t_{n+1} = 2 \cdot t_n + 1 \quad (n \geq 1).$$

- (i) Bereken de termen tot en met t_6 van de rij $(t_n)_{n=1}^{\infty}$.
- (ii) Bewijs met *inductie* dat

$$t_n = 2^n - 1 \quad (n \geq 1).$$

- (c) In de verzameling $V = \{1, 2, \dots, 5\}$ hebben we een binaire relatie

$$R := \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle, \langle 4, 5 \rangle, \langle 5, 4 \rangle \} \quad (5 \text{ paren}).$$

Geef de relatie weer als een *gerichte graaf*.

- (i) Teken de gerichte graaf van de relaties $R^2 := R \circ R$ en $R^3 = R^2 \circ R$.
- (ii) Wat is nu de *transitieve afsluiting* van R (weergave naar eigen smaak)?

Normering:

1a	3	2a	3	3a	3	4a	3	5a	3	MC	20
1b	5	2b	2	3b	3	4b	3	5b	5		
1c	5	2c	4	3c	4	4c	4	5c	5		
		2d	4	3d	3	4d	4				
				3e	4						
13		13		17		14		13			20

Voor het multiple choice gedeelte geldt: -3ptn per fout antwoord.

Totaal op 90

Cijfer = Behaald/10 + 1

Het cijfer wordt nadien aangevuld met de behaalde huiswerkbonus.

Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard (Knop "Course information", folder # 10). De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Wetten van de verzamelingen algebra

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complement:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

Vervangingsregel: [informatie gewist]

Tabel 1: Wetten van de verzamelingen-algebra

Wetten van de propositie algebra

Commutatieve wetten:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

Associatieve wetten:

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

Distributieve wetten:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Identiteitswetten:

$$p \vee \top \equiv \top \text{ en } p \vee \perp \equiv p$$

$$p \wedge \top \equiv p \text{ en } p \wedge \perp \equiv \perp$$

Idempotentie:

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

Negatie:

$$p \vee \neg p \equiv \top$$

$$p \wedge \neg p \equiv \perp$$

DeMorgan's wetten:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Involutie:

$$\neg \neg p \equiv p$$

Vervangingsregel: [informatie gewist]

Tabel 8: Wetten van de propositie-algebra

Omzetting van implicatie en dubbele implicatie

($\rightarrow$ omzetten in $\vee$ en $\neg$)

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

(negatie van een implicatie)

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

($\leftrightarrow$ omzetten in $\wedge$, $\vee$, en $\neg$)

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

(Contrapositie)

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Tabel 9: Omzetting van (dubbele) implicatie

Enkele standaard argumentvormen

naam	argumentvorm	evt. variant	alternatieve naam
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$ $\therefore q$		' $\rightarrow$ ' eliminatie regel
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$ $\therefore \neg p$		
Disjunctief syllogisme	$p \vee q, \neg q$ $\therefore p$	$p \vee q, \neg p$ $\therefore q$	
Dilemma regel	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ $\therefore r$		' $\vee$ ' eliminatie regel
Contradictieregel	$p \rightarrow \perp$ $\therefore \neg p$		' $\neg$ ' introductie regel
Ketenregel	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$		hypothetisch syllogisme
Contrapositieregel	$p \rightarrow q$ $\therefore \neg q \rightarrow \neg p$		
Al introductie	$Z(y)$ $\therefore \forall x Z(x)$	(toelichting weggelaten)	
Er introductie	$Z(y)$ $\therefore \exists x Z(x)$	(toelichting weggelaten)	
Al eliminatie	$\forall x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	(toelichting weggelaten)	
Er eliminatie	$\exists x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	(toelichting weggelaten)	

naam, studierichting & jaar:

17-12-2009

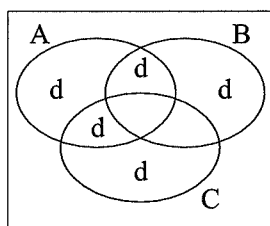
6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

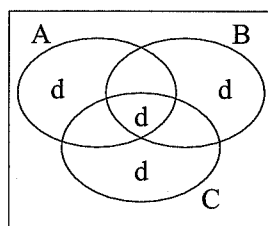
M1. Gegeven is een element d en drie verzamelingen A , B , C in een universum, waarbij

$$(d \in A) \wedge (\neg(d \in B) \vee \neg(d \in C)).$$

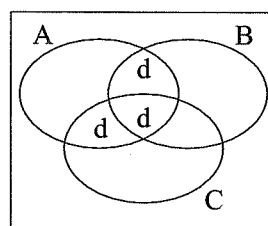
In een Venn-diagram met A , B , C plaatsen we een 'd' in elk vlakdeel waar het element d volgens de uitspraak toe kan behoren. Welke van de volgende vier Venn-diagrammen geeft de situatie correct weer.



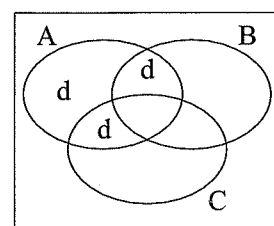
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

- ☐ Figuur 1.
- ☐ Figuur 2.
- ☐ Figuur 3.
- ☐ Figuur 4.

M2. De samengestelde relatie $IsOuderVan \circ IsBroerOfZusVan$ is de relatie

- ☐ $IsStiefOuderVan$.
- ☐ $IsOomOfTanteVan$.
- ☐ $IsNeefjeOfNichtjeVan$.
- ☐ (...) dit is geen standaard familierelatie.

M3. Neem de zin

"Als het een werkdag is, heb je vrije toegang tot de gebouwen, maar als het een zondag is of een feestdag, dan heb je geen vrije toegang tot de gebouwen".

Welke formule komt in aanmerking als de logische vorm van deze zin? N.B.: let op de voorrangsgeregels; er zijn minimaal haakjes geplaatst.

- ☐ $(w \rightarrow t) \wedge (z \vee f \rightarrow \neg t)$.
- ☐ $(w \rightarrow t) \vee (z \vee f \rightarrow \neg t)$.
- ☐ $(w \rightarrow t) \wedge (z \wedge f \rightarrow \neg t)$.
- ☐ $(w \rightarrow t) \vee (z \wedge f \rightarrow \neg t)$.

M4. Welke van de volgende vier *waarheidstabellen* evalueert de formule $\neg p \rightarrow q$ juist:

p	q	$\neg p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow q$	$\neg p \rightarrow q$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
		Tabel 1	Tabel 2	Tabel 3	Tabel 4

- ☐ Tabel 1.
- ☐ Tabel 2.
- ☐ Tabel 3.
- ☐ Tabel 4.

M5. De formule $\neg \exists x (Px \vee Qx)$ is *logisch equivalent* met:

- ☐ $\forall x Px \vee \forall x Qx$.
- ☐ $\forall x \neg Px \vee \forall x \neg Qx$.
- ☐ $\exists x (\neg Px \wedge \neg Qx)$.
- ☐ $\forall x \neg Px \wedge \forall x \neg Qx$.

M6. "Als sommigen stelen, heeft iedereen een deurslot nodig". De zinsvorm hiervan is $\exists x Px \rightarrow \forall y Qy$. We willen aantonen dat dit geen tautologie is. We zoeken daarom naar een universum van twee personen p_1, p_2 en een interpretatie in dat universum, waarbij de zin onwaar is. Een van de volgende universa is geschikt:

	P	Q	P	Q	P	Q	P	Q
p_1	-	+	-	+	+	-	-	-
p_2	-	+	+	+	-	+	-	+
	universum 1		universum 2		universum 3		universum 4	

- ☐ Universum 1.
- ☐ Universum 2.
- ☐ Universum 3.
- ☐ Universum 4.

M7. Een rij getallen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ is *recursief gedefinieerd* door $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := a_n + (-1)^{n+1}$ ($n \geq 0$). De eerste vier elementen van de rij zijn:

- ☐ 1, -2, 1, -2.
- ☐ 1, -2, 3, -4.
- ☐ 1, 0, 1, 0.
- ☐ (...) dit is geen recursief voorschrift; er ontstaat geen rij.

$x \backslash y$	appel	banaan	kiwi	peer	$\exists y \in F L(x, y)$
ann	F	T	T	T	
bart	F	F	F	T	
carl	F	T	T	F	
$\forall x \in P L(x, y)$					

Tabel bij opgave 4(c)