

1. Verzamelingen

- (a) Venn-diagrammen en aantallen. Gegeven zijn drie verzamelingen A, B, C met (respectievelijk) 9, 8, 7 elementen in een universum U met 20 elementen. Verder is gegeven dat

$$\#(A \cap B \cap C) = 1,$$

$$\#(A \cap B) = \#(B \cap C) = \#(C \cap A) = 3.$$

Bepaal de volgende aantallen met behulp van Venn-diagrammen:

$$\#(A \cup B \cup C), \#(A' \cap B' \cap C'), \#(U \setminus (A \cup B)).$$

- (b) De volgende gelijkheid is correct:

$$A' \cup (B \cup C)' = (A \cap B)' \cap (A \cap C)'.$$

Controleer de gelijkheid met behulp van de wetten van de verzamelingenalgebra. Geef daarbij stap voor stap aan welke wetten je gebruikt.

2. Relaties

In deze opgave gebruiken we de volgende verzameling.

$$\text{Weekdagen} := \{ma, di, wo, do, vr, za, zo\}.$$

Verder hebben we twee binaire relaties $R := \text{VolgendeWerkdag}$ en $S := \text{Eergisteren}$ in de verzameling Weekdagen , gegeven door opsomming:

$$R := \{ \langle ma, di \rangle, \langle di, wo \rangle, \langle wo, do \rangle, \langle do, vr \rangle, \langle vr, ma \rangle, \langle za, ma \rangle, \langle zo, ma \rangle \}.$$

$$S := \{ \langle ma, za \rangle, \langle di, zo \rangle, \langle wo, ma \rangle, \langle do, di \rangle, \langle vr, wo \rangle, \langle za, do \rangle, \langle zo, vr \rangle \}.$$

- (a) Stel de relaties R en S elk apart voor door middel van Venn-diagrammen. (Het multiple choice blad bevat de aanzet voor deze Venn diagrammen.)
- (b) De relatie R is *niet reflexief*, *niet symmetrisch*, en *niet transitief*. Geef voor elk van deze begrippen aan wat er schort.
- (c) Laat zien dat de relaties $R \circ S$ en $S \circ R$ niet dezelfde zijn.

3. Propositielogica

- (a) Algemene kennis:

- (i) In een formule treden 5 *atomaire proposities* op. Hoeveel regels bevat de (body van de) volledige waarheidstabel?
- (ii) Wat bedoelt men precies met een *geldige argumentvorm*?

- (b) We bekijken het volgende propositielogische argument.

Als het niet regent, gaan we op stap. Regent het en waait het, dan gaan we niet op stap. Het regent maar het waait niet. $\therefore$ We gaan niet op stap.

Geef een *vertaalsleutel* en een *vertaling* volgens de sleutel.

- (c) Ga na met behulp van waarheidstabellen of het argument uit onderdeel (b) *geldig* is.

4. Predicatenlogica

- (a) In dit onderdeel kijken we naar de zinsvorm

$$\forall x (Dx \rightarrow \exists y (Sy \wedge \neg Vyx)).$$

Zet de formule om in goed Nederlands met behulp van de aangegeven vertaalsleutel.

Dx := "x is een docent".

Sx := "x is een student".

Vxy := "x haalt voldoende bij y".

- (b) Gegeven is de volgende evaluatie van het binaire predicaat V uit het vorige onderdeel. Het symbool '+' geeft een voldoende aan.

$x \backslash y$	d_1	d_2	d_3	d_4
anja	+	-	+	+
bart	+	+	+	+
carl	-	+	+	-
dirk	+	+	-	+

Is de uitspraak uit (a) onder deze interpretatie waar of onwaar? Graag toelichting.

- (c) (Vervolg van onderdelen (a) en (b)) Geef de waarheidsverzameling bij de open zin

$$Sx \wedge \forall y (Dy \rightarrow Vxy).$$

- (d) Bewijs door de aangegeven argumentvormen aaneen te schakelen.

$$\exists x (Q_1x \vee Q_2x), \quad \forall x (Q_1x \rightarrow Px), \quad \forall x (Q_2x \rightarrow Px), \quad \therefore \exists x Px$$

(er-eliminatie regel, al-eliminatie regel, of-eliminatie regel, er-introductie regel).

5. Inductie en Recursie

- (a) Algemene kennis.

- (i) Leg uit: *het principe van (gewone) inductie*. Je mag het antwoord geven in de vorm van een tabel of met woorden.
- (ii) Gegeven een (binaire) relatie R in een verzameling V , wat bedoelt men met: *de transitieve afsluiting* van R ? Je mag een formule geven of een verbale omschrijving.

- (b) Een rij natuurlijke getallen k_n voor $n \geq 0$ wordt als volgt *recursief gedefinieerd*.

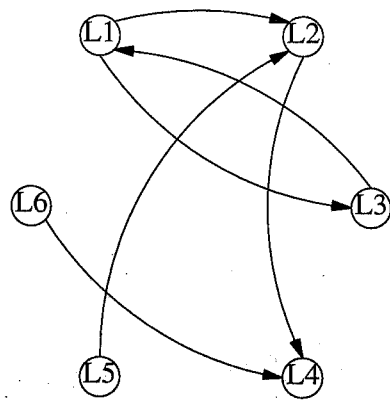
$$k_0 := 1, k_{n+1} := 3 \cdot k_n + 2 \cdot 3^{n+1}.$$

- (i) Bereken de termen k_1, k_2, k_3 .

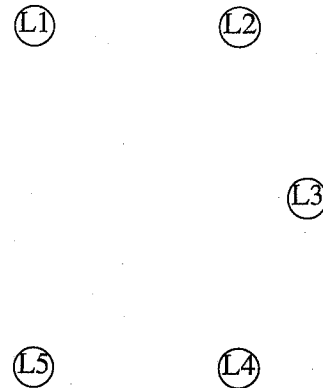
- (ii) Toon aan met (gewone) inductie naar $n \geq 0$ dat $k_n = (2n+1) \cdot 3^n$.

- (c) In een netwerk met locaties $\{L_1, \dots, L_6\}$ is er een "signaal" relatie S , waar xSy betekent dat een signaal kan worden verstuurd van locatie x rechtstreeks naar locatie y . De relatie S is concreet gegeven in de volgende gerichte graaf. Laat $Strans$ de transitieve afsluiting zijn van S . Vul in het rechterplaatje de gerichte graaf in, die correspondeert met $Strans$.

N.B.: Deze figuur is ook opgenomen achterop het multiple choice formulier. Je kan deze voor je antwoord gebruiken.



signaal



transitief signaal

Normering:

1a	7	2a	5	3a	4	4a	3	5a	4	MC	17
1b	7	2b	5	3b	5	4b	5	5b	5		
		2c	5	3c	5	4c	3	5c	5		
						4d	5				
14		15		14		16		14		17	

(Multiple-choice gedeelte: -4 punten per fout)

Totaal = 90

Cijfer = Behaald / 10 + 1

Wetten van de verzamelingen algebra

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complement:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

Enkele standaard argumentvormen

naam	argumentvorm	evt. variant	alternatieve naam
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$ $\therefore q$		' $\rightarrow$ ' eliminatie regel
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$ $\therefore \neg p$		
Disjunctieve toevoeging	p $\therefore p \vee q$	q $\therefore p \vee q$	' $\vee$ ' introductie regel
Conjunctieve toevoeging	p, q $\therefore p \wedge q$		' $\wedge$ ' introductie regel
Disjunctief syllogisme	$p \vee q, \neg q$ $\therefore p$	$p \vee q, \neg p$ $\therefore q$	
Dilemma regel	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ $\therefore r$		' $\vee$ ' eliminatie regel
Contradictieregel	$p \rightarrow \perp$ $\therefore \neg p$		' $\neg$ ' introductie regel
Ketenregel	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$		hypothetisch syllogisme
Contrapositiereg	$p \rightarrow q$ $\therefore \neg q \rightarrow \neg p$		
Al introductie	$Z(y)$ $\therefore \forall x Z(x)$	(toelichting weggelaten)	
Er introductie	$Z(y)$ $\therefore \exists x Z(x)$	(toelichting weggelaten)	
Al eliminatie	$\forall x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	(toelichting weggelaten)	
Er eliminatie	$\exists x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	(toelichting weggelaten)	

naam, studierichting & jaar:

19-02-2009

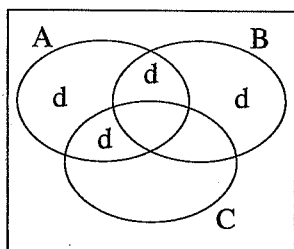
Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

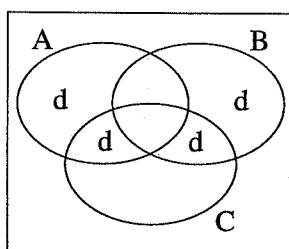
M1. Gegeven zijn een element d en drie verzamelingen A, B, C in een universum, waarbij

$$d \in (A \cap B') \cup (B \cap C').$$

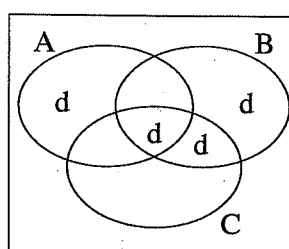
In een Venn-diagram met A, B, C plaatsen we een 'd' in elk vlakdeel waar het element d volgens de formule toe kan behoren. Welke van volgende vier Venn-diagrammen geeft de situatie correct weer.



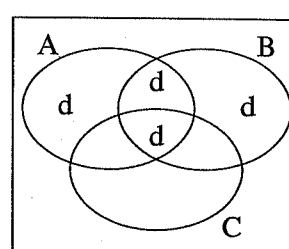
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

- ☐ Figuur 1.
- ☐ Figuur 2.
- ☐ Figuur 3.
- ☐ Figuur 4.

M2. De personenrelatie *IsKleinZoonVan* kan best worden weergegeven als

- ☐ De samenstelling *IsDochterVan* $\circ$ *IsZoonVan*.
- ☐ De samenstelling *IsZoonVan* $\circ$ *IsDochterVan*.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties *IsDochterVan* $\circ$ *IsZoonVan* en *IsZoonVan* $\circ$ *IsZoonVan*.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties *IsZoonVan* $\circ$ *IsDochterVan* en *IsZoonVan* $\circ$ *IsZoonVan*.

M3. Een *contradictie* in de propositiologica is een formule

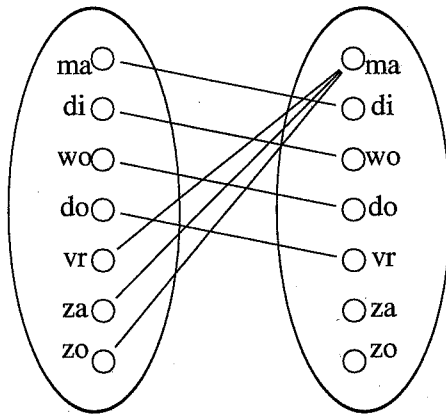
- ☐ die onwaar is terwijl de atomaire onderdelen waar zijn.
- ☐ die altijd onwaar is ongeacht de waarheid van de atomaire onderdelen.
- ☐ die de logische vorm van een slecht geformuleerde uitspraak weergeeft.
- ☐ van de gedaante $p \rightarrow \neg p$.

M4. De formule $\forall x(Px \vee Qx)$ is *logisch equivalent* met:

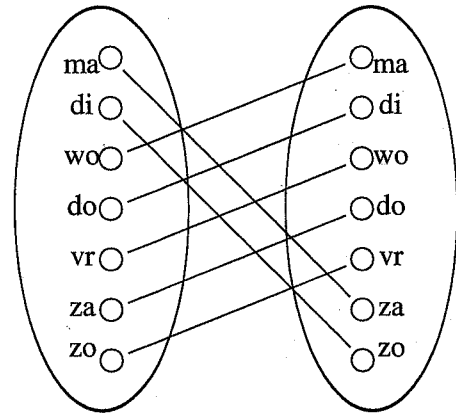
- ☐ $\forall xPx \vee \forall xQx$.
- ☐ $\forall xPx \wedge \forall xQx$.
- ☐ $\forall x(\neg Px \rightarrow Qx)$.
- ☐ -- (geen van deze).

M5. Het *recursieve voorschrift* voor $f(n) := n!$ (n -faculteit, $n \geq 1$) is $f(1) := 1$ (basis) en verder:

- o $f(n) := f(n+1) \cdot n.$
- o $f(n+1) := f(n) \cdot n.$
- o $f(n+1) := f(n) \cdot (n+1).$
- o $f(n+1) := f(n) + (n+1).$

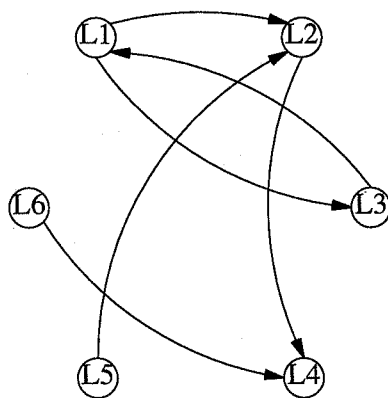


de relatie R (VolgendeWerkdag)

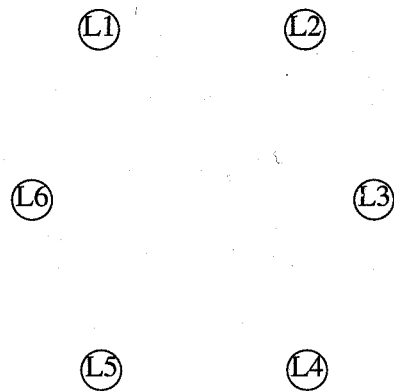


de relatie S (Eergisteren)

Figuur bij opgave 2(a): voorstelling van relaties



signaal



transitief signaal

Figuur bij opgave 5(c): Transitieve afsluiting.