

Opgelet: er is een *apart multiple-choice gedeelte* op de laatste bladzijde(n). Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij!

1. Verzamelingen

- (a) (Algemene kennis)
- (i) Zijn deze verzamelingen *gelijk*: $\{1, 3, 5, 7\}$ en $\{3, 1, 5, 1, 7, 1\}$?
 - (ii) Van twee verzamelingen A en B is gegeven dat $\#A=4$, $\#B=5$, en $\#(A \cap B)=1$. Wat is het *aantal elementen* van $A \cup B$?
 - (iii) We gebruiken de gegevens uit het vorige onderdeel (ii) en vormen een verzameling met drie parten: $\{A \setminus B, A \cap B, B \setminus A\}$. Is dit een *partitie* van $A \cup B$ (antwoord met ja / nee/ onvoldoende informatie)?
- (b) Maak een *Venn-diagram* voor elk van de twee opgegeven formules. Geef duidelijk aan welk gebied beschreven wordt door de formules. Zijn de twee verzamelingen gelijk?
- $$(A \Delta B) \cap C, (A \cap C) \Delta (B \cap C)$$
- (c) Vereenvoudig zover mogelijk met behulp van *verzamelingenalgebra*. Geef daarbij aan welke wetten je gebruikt. Geef ook aan bij welke stappen de *vervangingsregel* wordt gebruikt. Het universum is U . **N.B.:** na de normering vind je een tabel met wetten uit de verzamelingenalgebra.
- $$(A \cap B') \cup (A \cap B).$$

2. Relaties

In deze opgave bekijken we twee relaties, *VolgendeKlinker* en *VolgendeMedeklinker*, in de verzameling $\text{Alfabet} := \{ 'a', 'b', \dots, 'z' \}$. De *relatievoorschriften* zijn als volgt (N.B.: x en y zijn variabelen).

x *VolgendeKlinker* y betekent: y is de eerste klinker uit het alfabet die na x komt.

x *VolgendeMedeklinker* y betekent: y is de eerste medeklinker uit het alfabet die na x komt.

Bijvoorbeeld:

'a' *VolgendeKlinker* 'e' en 'p' *VolgendeKlinker* 'u';

'a' *VolgendeMedeklinker* 'b' en 'r' *VolgendeMedeklinker* 'v'.

'z' *VolgendeMedeklinker*? kan niet worden ingevuld op het vraagteken.

- (a) (Algemene kennis)
- (i) Als R en S twee binaire relaties zijn, welke eigenschap moet een paar $\langle a, b \rangle$ hebben om in de *samengestelde relatie* $R \circ S$ te zijn?
 - (ii) Wat bedoelt men met " R is antisymmetrisch"?
 - (iii) Is de relatie $R := \{ \langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 0 \rangle \}$ is antisymmetrisch? Is de relatie $R \circ R$ antisymmetrisch? Antwoord telkens met ja / nee.
 - (iv) Geef een formule voor de *inverse* van een samengestelde relatie $R \circ S$ in termen van R^{-1} en S^{-1} .
- (b) Antwoord met ja of nee: Is de relatie *VolgendeKlinker* antisymmetrisch? Is de relatie *VolgendeMedeklinker* antisymmetrisch?
- (c) Geef drie verschillende paren in de relatie *VolgendeKlinker* $\circ$ *VolgendeMedeklinker*. Geef vervolgens drie verschillende paren in de relatie *VolgendeMedeklinker* $\circ$ *VolgendeKlinker*.
- (d) We bekijken de inverse relatie $R := \text{VolgendeKlinker}^{-1}$. Geef alle elementen x van het alfabet met ' i ' $R x$. Let op de quotes; x is een variabele, geen letter.

3. Propositielogica

- (a) (Algemene kennis)
- (i) Om de geldigheid van een argumentvorm " $\langle \dots \text{premissenlijst} \dots \rangle \therefore \text{conclusie}$ " te controleren wordt in de propositielogica vaak gebruik gemaakt van een waarheidstabel. Wat bedoelt men in dit verband met een *kritieke regel* van een waarheidstabel?
- (ii) (Vervolg (i)) Hoe zie je aan de waarheidstabel dat de argumentvorm *geldig* is?
- (b) Laat zien door middel van (een regel van) een *waarheidstabel* dat de formules
- $$p \wedge (q \rightarrow r), \quad (p \wedge q) \rightarrow (p \wedge r)$$
- niet *logisch equivalent* zijn.
- (c) Laat zien door middel van *propositiealgebra* dat de formules
- $$p \rightarrow (q \wedge r), \quad (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$$
- logisch equivalent* zijn. Begin met de implicaties om te zetten in de benodigde voegwoorden " $\neg$ ", " $\vee$ ", " $\wedge$ ". Geef bij de daarop volgende stappen telkens aan welke wet je gebruikt.
- N.B.:** na de normering vind je een tabel met wetten uit de propositiealgebra.
- Voor de rest van deze opgave bekijken we het volgende argument (motto: wie niet sterk is, moet slim wezen).
- Jan bereikt zijn doel. Om zijn doel te bereiken dient Jan sterk te wezen of slim te wezen. Jan is niet sterk. $\therefore$ Jan is slim.*
- (d) Geef een *vertaalsleutel* en geef daarmee de *argumentvorm* weer.
- (e) Het argument in onderdeel (d) is *geldig*: verifieer dit met een *aaneenschakeling van standaard argumenten*. **N.B.:** na de normering vind je een tabel met standaard argumentvormen.

4. Predicatenlogica

- (a) (Algemene kennis)
- (i) Wat bedoelt men met een *vrije variabele*?
- (ii) Maak de definitie af:
- $$\forall x \in A \, Px \text{ betekent } \forall x (x \in A \rightarrow Px)$$
- $$\exists x \in A \, Px \text{ betekent } \exists x (x \in A \wedge Px)$$
- (iii) De regel van $\exists$ -eliminatie ziet er zo uit:
- $$\exists x \, Z(x) \therefore Z(y).$$
- Wat moet je in acht nemen m.b.t. de variabele y ?
- (b) Neem de zin: "Als een persoon aardig is voor iedereen, dan is niemand bang voor haar/hem".
- (i) Geef een *vertaalsleutel* voor de atomaire zinnen en geef daarmee de logische vorm (zinsvorm) van de zin.
- (ii) Hoeveel vrije variabelen heeft de zin? Welke?
- (c) We hebben een universum van vier personen *ann*, *bart*, *carl*, en *dirk* en een tweeplaatsig predicaat $G \, xy$ met interpretatiesleutel
- $$G \, xy := \text{"persoon } x \text{ vindt persoon } y \text{ geweldig"}.$$
- De gegevens zijn verwerkt in de volgende tabel.

$x \backslash y$	ann	bart	carl	dirk	$\forall y G(x, y)$	$\exists y G(x, y)$
ann	F	T	F	T		
bart	F	F	F	F		
carl	T	T	T	T		
dirk	F	F	T	T		
$\forall x G(x, y)$						
$\exists x G(x, y)$						

- (i) Interpreteer de volgende twee formules in een vlotte zin.
 $\exists x G(x, ann), \quad \exists y G(bart, y)$.
- (ii) Een van de zinnen in (i) is niet waar onder de gegeven interpretatie. Leg uit welke en waarom.
- (iii) Evalueer de lege plaatsen in de tabel met 'T' (true) of 'F' (false). **N.B.:** de tabel is overgenomen op de achterzijde van het Multiple-choice formulier. Je mag deze gebruiken voor je antwoord.
- (d) Gebruik de interpretatie uit (c) om te laten zien dat de argumentvorm
 $\forall y \exists x G(x, y) \therefore \forall y G(y, y)$
niet geldig is.

5. Inductie en Recursie

- (a) Algemene kennis:
- (i) Zij R een relatie in een eindige verzameling A . Wat bedoelt men met een weergave van de relatie R in matrixvorm?
- (ii) Wat bedoelt men met de *transitieve afsluiting* van een (binaire) relatie R ?
- (b) Een rij reële getallen $(t_n)_{n=2}^{\infty}$ is als volgt recursief gedefiniëerd.
 $t_2 := 4; \quad t_{n+1} := t_n + 2n + 2 \quad (n \geq 2).$
- (i) Bereken de termen t/m t_5 van de rij $(t_n)_{n=2}^{\infty}$.
- (ii) Bewijs met *inductie* dat $t_n = n^2 + n - 2$ voor alle $n \geq 2$.
- (c) Gegeven is een verzameling $A = \{1, 2, 3, 4\}$ (de elementen worden ook in deze volgorde gebruikt) en een binaire relatie R in A , beschreven in matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- (i) Geef de relatie weer als een verzameling van paren $\langle x, y \rangle \in A \times A$.
- (ii) Geef de relatie weer als een *gerichte graaf*.
- (iii) Teken de gerichte graaf van de relaties $R^2 := R \circ R$ en van $R^3 := R^2 \circ R$. Wat is nu de *transitieve afsluiting* van R (weergave naar eigen smaak)?

Normering:

1a	3	2a	4	3a	2	4a	3	5a	2	MC	22
1b	5	2b	2	3b	3	4b	3	5b	4		
1c	5	2c	3	3c	4	4c	6	5c	6		
		2d	3	3d	3	4d	3				
				3e	4						
13		12		16		15		12		22	

Voor het multiple choice gedeelte geldt: -4ptn per fout antwoord.

Totaal op 90

Cijfer = Behaald/10 + 1

Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard (Knop "Course information", folder #8). De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Wetten van de verzamelingen algebra

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complement:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

Vervangingsregel: [informatie gewist]

Wetten van de propositie algebra

Commutatieve wetten:

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

Associatieve wetten:

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

Distributieve wetten:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Identiteitswetten:

$$p \vee \top \equiv \top \text{ en } p \vee \perp \equiv p$$

$$p \wedge \top \equiv p \text{ en } p \wedge \perp \equiv \perp$$

Idempotentie:

$$p \vee p \equiv p$$

$$p \wedge p \equiv p$$

Negatie:

$$p \vee \neg p \equiv \top$$

$$p \wedge \neg p \equiv \perp$$

DeMorgan's wetten:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Involutie:

$$\neg \neg p \equiv p$$

Vervangingsregel: [informatie gewist]

Omzetting van implicatie en dubbele implicatie

($\rightarrow$ omzetten in $\vee$ en $\neg$)

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

(negatie van een implicatie)

$$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

($\leftrightarrow$ omzetten in $\wedge$, $\vee$, en $\neg$)

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$$

(Contrapositie)

$$(p \rightarrow q) \equiv (\neg q \rightarrow \neg p)$$

Enkele standaard argumentvormen

naam	argumentvorm	evt. variant	alternatieve naam
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$ $\therefore q$		' $\rightarrow$ ' eliminatie regel
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$ $\therefore \neg p$		
Disjunctief syllogisme	$p \vee q, \neg q$ $\therefore p$	$p \vee q, \neg p$ $\therefore q$	
Dilemma regel	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ $\therefore r$		' $\vee$ ' eliminatie regel
Contradictieregel	$p \rightarrow \perp$ $\therefore \neg p$		' $\neg$ ' introductie regel
Ketenregel	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$		hypothetisch syllogisme
Contrapositieregel	$p \rightarrow q$ $\therefore \neg q \rightarrow \neg p$		

naam, studierichting & jaar:

17-12-2008

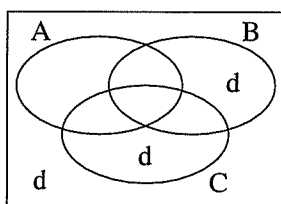
6. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

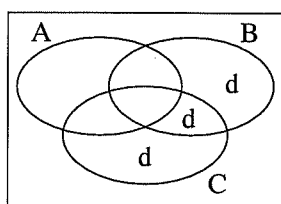
M1. Gegeven is een element d en drie verzamelingen A, B, C in een universum, waarbij

$$d \in A' \cap (B \cup C).$$

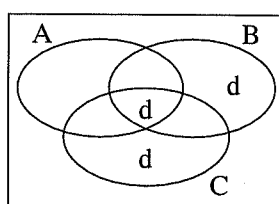
In een *Venn-diagram* met A, B, C plaatsen we een 'd' in elk vlakdeel waar het element d volgens de formule toe kan behoren. Welke van de volgende vier Venn-diagrammen geeft de situatie correct weer.



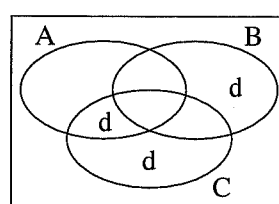
Figuur 1



Figuur 2



Figuur 3



Figuur 4

- ☐ Figuur 1.
- ☐ Figuur 2.
- ☐ Figuur 3.
- ☐ Figuur 4.

M2. De binaire relatie *IsGrootmoederVan* kan worden weergegeven als

- ☐ De samenstelling *IsVaderVan* $\circ$ *IsMoederVan*.
- ☐ De samenstelling *IsMoederVan* $\circ$ *IsVaderVan*.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties *IsVaderVan* $\circ$ *IsMoederVan* en *IsMoederVan* $\circ$ *IsMoederVan*.
- ☐ De vereniging van de samengestelde relaties *IsMoederVan* $\circ$ *IsVaderVan* en *IsMoederVan* $\circ$ *IsMoederVan*.

M3. Welke van de volgende vier *waarheidstabellen* evalueert de formule $\neg p \vee \neg q$ juist:

p	q	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg p \vee \neg q$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
		Tabel 1	Tabel 2	Tabel 3	Tabel 4

- ☐ Tabel 1.
- ☐ Tabel 2.
- ☐ Tabel 3.
- ☐ Tabel 4.

M4. De argumentvorm van het volgende argument is *standaard*:

Als je faalt voor LTR, dan faal je ook voor Inleiding Logica.
 $\therefore$ Je faalt niet voor LTR.

Wat is de correcte naam van dit standaard argument?

- ☐ Dilemma regel.
- ☐ Disjunctief syllogisme.
- ☐ Contradictieregel.
- ☐ Modus tollens.

M5. Welke kommentaar op het volgende *argument* is meest terzake:

Sommige mensen zijn nooit tevreden. $\therefore$ Niemand is altijd tevreden.

- ☐ De argumentvorm is een standaard argument over negatie van de al-kwantor; i.h.b. is het een geldig argument.
- ☐ De argumentvorm is een standaard argument over negatie van de er-kwantor; i.h.b. is het een geldig argument.
- ☐ Dit argument is niet geldig want je moet meerdere premissen hebben om een conclusie te trekken.
- ☐ Dit argument is niet geldig want er is een interpretatie mogelijk met een ware premisse en een onware conclusie.

M6. Het *recursieve voorschrift* voor de rij getallen $1, -2, 3, -4, 5, -6, \dots$ is:

- ☐ $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := -(a_n + 1)$.
- ☐ $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := -a_n + 1$.
- ☐ $a_0 := 1$ en $a_{n+1} := -a_n + (-1)^n$.
- ☐ (...) een rij met een alternerend teken heeft geen recursief voorschrift.

Tabel bij opgave 4(c) (je mag hier je antwoorden invullen).

$x \backslash y$	ann	bart	carl	dirk	$\forall y G(x, y)$	$\exists y G(x, y)$
ann	F	T	F	T		
bart	F	F	F	F		
carl	T	T	T	T		
dirk	F	F	T	T		
$\forall x G(x, y)$						
$\exists x G(x, y)$						