

1. Verzamelingen en relaties.

- (a) In een universum U met 33 elementen zijn drie verzamelingen A, B, C gegeven, elk met 15 elementen. Verder is gegeven dat

$$\#(A \cap B \cap C) = 1,$$

$$\#(A \cap B) = 6, \quad \#(B \cap C) = 5, \quad \#(C \cap A) = 4.$$

Bepaal de volgende aantallen met behulp van Venn-diagrammen:

- (i) $\#A \setminus (B \cup C)$.
 - (ii) $\#(A \cup B) \setminus C$.
 - (iii) $\#U \setminus (A \cup B \cup C)$.
- (b) Vereenvoudig zover mogelijk met behulp van *verzamelingenalgebra*. Geef daarbij aan welke wetten je gebruikt. Het universum is U .

$$(A' \cup (A \cap B'))'.$$

N.B.: er is een tabel met wetten op pagina 4.

- (c) Zij A de verzameling letters $\{ 'a', 'b', 'c', 'd' \}$, en zij B de verzameling $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ (opgevat als posities in het alfabet). Gegeven zijn twee relaties

$$R := \{ \langle x, y \rangle : x, y \in A, \text{ letter } x \text{ komt strict vóór letter } y \},$$

$$S := \{ \langle x, y \rangle : \text{letter } x \in A \text{ komt op positie } y \in B \}.$$

- (i) Geef de beide relaties R, S weer door *opsomming* en geef van beide opsommingen het precieze aantal elementen (aantal paren in de relatie).
- (ii) Geef de *samengestelde relatie* $S \circ R$ weer door opsomming en via een relatievoorschrift.

2. Propositielogica

- (a) Algemene kennis:

- (i) In een argumentvorm met drie premissen en een conclusie treden in totaal zes atomaire proposities op. Je wilt deze vorm testen met een *waarheidstabel*. Hoeveel regels bevat de (body van de) volledige waarheidstabel?
- (ii) Wat bedoelt men met een *kritieke regel* in een waarheidstabel bij een argumentvorm?
- (iii) Wat bedoelt men in de propositielogica precies met een *geldige argumentvorm*?

Voor de rest van deze opgave bekijken we de volgende argumentvorm:

$$p \vee q \rightarrow r$$

$$\therefore (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

- (b) Controleer de argumentvorm op geldigheid door middel van een *waarheidstabel*.
- (c) Geef een (*combinatie*) strategie om deze argumentvorm te controleren.
- (d) Controleer elk werkargument uit (c) met een *aaneenschakeling* van standaard argumenten. N.B.: er is een tabel op p. 5 met de voornaamste standaard argumentvormen uit propositie- en predicaatlogica.

3. Predicatenlogica

(a) Algemene kennis:

(i) Geef een logisch equivalente formule voor de *getypeerde er-kwantor*:
 $\exists x \in A, Px \equiv \exists x (\quad)$.

(ii) Geef een logisch equivalente formule voor de *getypeerde al-kwantor*:
 $\forall x \in A, Px \equiv \forall x (\quad)$.

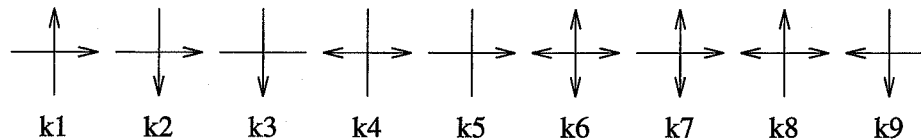
(b) Vertaal de volgende zin met behulp van de aangegeven *vertaalsleutel*. Zorg ervoor dat het antwoord geen overbodige *haakjes* bevat.

"Als iedereen aardig is, is niemand bang voor iemand".

$Ax :=$ "x is aardig"

$Bxy :=$ "x is bang voor y"

(c) Situatie-logica. Gegeven is een universum van kruisen waarvan sommige armen een pijlpunt hebben en andere niet. Laat Bx, Ox, Lx, Rx respectievelijk uitdrukken dat x een pijl naar boven, onder, links of rechts heeft.



(i) Geef de *waarheidsverzameling* van de open zin $\neg Bx \wedge \neg Ox$

(ii) Geef de *interpretatie* in vlot en correct Nederlands: $\forall x (Lx \rightarrow \neg Bx \wedge \neg Ox)$.

(iii) Volgende zin is niet waar in dit universum: $\forall x (Lx \wedge Rx \rightarrow Bx \vee Ox)$. Leg uit waarom niet.

(d) In dit onderdeel bekijken we de volgende geldige argumentvorm.

$$\exists x (Q_1x \vee Q_2x), \forall x (Q_1x \rightarrow Px), \forall x (Q_2x \rightarrow Px), \therefore \exists x Px.$$

Controleer de geldigheid door de volgende *standaard argumentvormen aaneen te schakelen* in een geschikte volgorde: er-eliminatie regel, al-eliminatie regel, of-eliminatie regel, er-introductie regel. N.B.: er is een tabel op p. 5 met de voornaamste standaard argumentvormen uit propositie- en predicatenlogica.

4. Ordening en equivalentie

(a) Algemene kennis:

(i) Gegeven is een verzameling V met deelverzameling A , een partiële ordening $\leq$ in V , en een element p van V . Geef in symbolische vorm de definitie van de volgende noties:

(1) p is het *grootste element* van A .

(2) p is een *maximaal element* van A .

(ii) Wat bedoelt men met een *volledig representantensysteem* van een equivalentierelatie R in een verzameling V ?

(b) Neem $V := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ met de Cartesische ordening (uitgaande van de natuurlijke ordening op $\mathbb{Z}$), en zij A de deelverzameling

$$\{ \langle x, y \rangle : 1 \leq x, 1 \leq y, 3 \leq x+y \leq 5 \} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Teken een *Hasse diagram* met de elementen van A . Je scoort meer als blijkt dat je het *algoritme* hiervoor kent.

- (c) (vervolg onderdeel (b)).
- (i) Heeft A een grootste element? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle maximale elementen van A .
 - (ii) Heeft A een kleinste element? Zo ja, geef dit element; zo niet, geef alle minimale elementen van A .
- (d) In de verzameling A kunnen we ook een *equivalentierelatie* ' $\equiv$ ' bekijken met het volgende voorschrift.
- $\langle x_1, x_2 \rangle \equiv \langle y_1, y_2 \rangle$ betekent $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$.
- (i) Geef een *volledig representantensysteem* voor de relatie ' $\equiv$ '.
 - (ii) Hoeveel *equivalentieklassen* zijn er op basis van je antwoord in sub-onderdeel (i)?

5. Functies

- (a) Algemene kennis:

- (i) Wat is het verschil tussen het *domein* en het *definitiegebied* van een functie?
- (ii) Wat is het verschil tussen het *bereik* en het *waardengebied* van een functie?

Voor de rest van deze opgave zijn de functies $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ en $h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gegeven met als respectievelijk functievoorschrift:

$$f(x) = x^2; \quad g(x) = x/2; \quad h(x) = x - 5.$$

- (b) Geef het *definitiegebied* en het *waardengebied* van de functies f , g en h .
- (c) Vul de volgende tabel in met de juiste *functiewaarde*; plaats een '-' indien er geen waarde is. N.B.: je mag voor je antwoord de tabel gebruiken achteraan het multiple-choice gedeelte.

$x =$	3	4	5	6	7	8	9
$f \circ g$							
$g \circ h$							
$h \circ f$							

- (d) Geef voor elk van de functies f , g , en h , aan of hun *inverse* bestaat, en (zo ja) wat het *functievoorschrift* is voor de inverse functie.

6. Inductie en Recursie

- (a) Algemene kennis:

- (i) Zij R een relatie in een eindige verzameling A . Hoe kom je aan een weergave van R in *matrixvorm*?
- (ii) Het (gewone) *principe van inductie* is een strategie bij het werken met gehele getallen. De premissen van het beginargument vormen een standaardlijst van wetten in $\mathbb{Z}$. Beschrijf het doel van dit beginargument en het (de) werkargument(en).
- (iii) Wat bedoelt men met de *transitieve afsluiting* van een relatie"?

- (b) Een rij natuurlijke getallen k_n voor $n \geq 0$ wordt als volgt *recursief gedefinieerd*.

$$k_0 := 1, \quad k_{n+1} := 3 \cdot k_n + 2 \cdot 3^{n+1}.$$

- (i) Bereken de termen k_1 , k_2 , k_3 .
- (ii) Toon aan met inductie naar $n \geq 0$ dat $k_n = (2n+1) \cdot 3^n$.

- (c) Gegeven is een verzameling A met 4 punten en een binaire relatie R in A (in matrixvorm):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Geef de *transitieve afsluiting* van R weer in matrixvorm. Suggestie: je mag eender welke voorstellingswijze gebruiken bij het vinden van de oplossing. Maar het eindresultaat moet wel in matrixvorm worden weergegeven.

Normering:

1a	4	2a	3	3a	2	4a	2	5a	2	6a	3	M	16
1b	4	2b	4	3b	3	4b	5	5b	3	6b	4		
1c	4	2c	3	3c	4	4c	4	5c	3	6c	4		
		2d	3	3d	4	4d	3	5d	3				
12		13		13		14		11		11		16	

(Multiple-choice gedeelte: -3punten per fout)

Totaal = 90

Cijfer = Totaal/10 + 1

Wetten van de verzamelingen algebra

Commutativiteit:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Associativiteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

Distributiviteit:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Identiteiten:

$$A \cup U = U \text{ en } A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A \text{ en } A \cap \emptyset = \emptyset$$

Idempotentie:

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

Complement:

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

DeMorgan's wetten:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

Involutie:

$$(A')' = A$$

Enkele standaard argumentvormen

naam	argumentvorm	evt. variant	alternatieve naam
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$ $\therefore q$		' $\rightarrow$ ' eliminatie regel
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$ $\therefore \neg p$		
Disjunctieve toevoeging	p $\therefore p \vee q$	q $\therefore p \vee q$	' $\vee$ ' introductie regel
Conjunctieve toevoeging	p, q $\therefore p \wedge q$		' $\wedge$ ' introductie regel
Disjunctief syllogisme	$p \vee q, \neg q$ $\therefore p$	$p \vee q, \neg p$ $\therefore q$	
Dilemma regel	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ $\therefore r$		' $\vee$ ' eliminatie regel
Contradictieregel	$p \rightarrow \perp$ $\therefore \neg p$		' $\neg$ ' introductie regel
Ketenregel	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$		hypothetisch syllogisme
Contrapositiereg	$p \rightarrow q$ $\therefore \neg q \rightarrow \neg p$		
Al introductie	$Z(y)$ $\therefore \forall x Z(x)$	(toelichting weggelaten)	
Er introductie	$Z(y)$ $\therefore \exists x Z(x)$	(toelichting weggelaten)	
Al eliminatie	$\forall x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	(toelichting weggelaten)	
Er eliminatie	$\exists x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	(toelichting weggelaten)	

Enkele standaard strategieën

$\rightarrow$ introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$P \rightarrow Q$
Werkargument:	[gegeven premissen], P	Q

Contrapositie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$P \rightarrow Q$
Werkargument:	[gegeven premissen], $\neg Q$	$\neg P$

$\vee$ introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$P \vee Q$
Werkargument:	[gegeven premissen], $\neg P$	Q

Ongerijmde	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\neg P$
Werkargument:	[gegeven premissen], P	$\perp$

$\vee$ eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $P \vee Q$	[gegeven doel]
Werkargument 1:	[gegeven premissen], P	[gegeven doel]
Werkargument 2:	[gegeven premissen], Q	[gegeven doel]

$\forall$ introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\forall x P(x)$
Werkargument:	[gegeven premissen]	$P(y)$

$\exists$ introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\exists x P(x)$
Werkargument:	[gegeven premissen]	$P(t)$

$\forall$ eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $\forall x P(x)$	[gegeven doel]
Werkargument:	[gegeven premissen], $P(t)$	[gegeven doel]

$\exists$ eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $\exists x P(x)$	[gegeven doel]
Werkargument:	[gegeven premissen], $P(y)$	[gegeven doel]

(Toelichtingen zijn weggelaten)

naam, studierichting & jaar:

13-02-2008

Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M1. R en S zijn binaire relaties. De formule $R \circ S$ voor een *samengestelde relatie* betekent:

- Eerst R , vervolgens S .
- Eerst S , vervolgens R .
- R en S , de volgorde van samenstelling maakt niet uit.
- R voor S of R na S , naargelang je van links naar rechts of van rechts naar links leest.

M2. Welke van de volgende vier *waarheidstabellen* evalueert de formule $p \vee q \rightarrow \neg q$ juist:

p	q	$p \vee q \rightarrow \neg q$	$p \vee q \rightarrow \neg q$	$p \vee q \rightarrow \neg q$	$p \vee q \rightarrow \neg q$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1
		Tabel 1	Tabel 2	Tabel 3	Tabel 4

- Tabel 1.
- Tabel 2.
- Tabel 3.
- Tabel 4.

M3. Welk commentaar op het volgende *argument* is meest terzake:

Iedereen heeft soms last van stress. $\therefore$ Er zijn tijden waarop iedereen last heeft van stress.

- De argumentvorm is een standaard argument over omwisselen van kwantoren; i.h.b. is het een geldig argument.
- De argumentvorm is een schakeling van vier standaard argumenten: al- en er-eliminatie, gevolgd door er- en al-(her)introductie, i.h.b. is het een geldig argument.
- Dit argument is niet geldig. Het aaneenschakelen van al- en er-eliminatie, gevolgd door er- en al-(her)introductie, is niet correct uitgevoerd.
- Dit argument is niet geldig want er is een interpretatie mogelijk met ware premissen en onware conclusie.

M4. Zij $f: V \rightarrow W$ een totale functie. De binaire relatie xRy in V met voorschrift " $fx = fy$ " is:

- een (totale) orderrelatie in V .
- een stricte orderrelatie in V .
- een equivalentierelatie in V .
- -- (geen van deze).

M5. Voor elk reëel getal $a \neq 0$ zijn vier functies van type $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven: ADD_a , SUB_a , MUL_a , en DIV_a met voor de hand liggende functievoorschriften. De formule voor de *samengestelde functie* $DIV_3 \circ SUB_2 \circ MUL_4(x)$ is

- ☐ $(4x - 2)/3$.
- ☐ $4x/3 - 2$.
- ☐ $4(x/3 - 2)$.
- ☐ -- (geen van deze formules is correct).

M6. Het *orderingsprincipe* in $\mathbb{Z}$ stelt dat:

- ☐ iedere niet-lege verzameling in $\mathbb{Z}$ een ondergrens heeft.
- ☐ iedere niet-lege verzameling in $\mathbb{Z}$ een bovengrens heeft.
- ☐ iedere niet-lege naar onder begrensde verzameling in $\mathbb{Z}$ een kleinste element heeft.
- ☐ iedere niet-lege naar boven begrensde verzameling in $\mathbb{Z}$ een kleinste element heeft.

Antwoordtabel bij opgave 5c:

$$(f(x) = x^2; \quad g(x) = x/2; \quad h(x) = x - 5).$$

$x =$	3	4	5	6	7	8	9
$f \circ g$							
$g \circ h$							
$h \circ f$							