

- ☞ Vergeet het aparte multiple choice gedeelte niet! ☞
 ☞ Er is een pagina met standaard argumentvormen ☞

1. Argumentvorm en strategie

Gegeven is het volgende argument.

Al wie veel bezit, is hebzuchtig.
 Al wie niet veel bezit, moet hard werken.
 Als iemand hebzuchtig is, is het leven niet rechtvaardig.
 Als iemand hard moet werken, is het leven niet rechtvaardig.
 $\therefore$ Het leven is niet rechtvaardig.

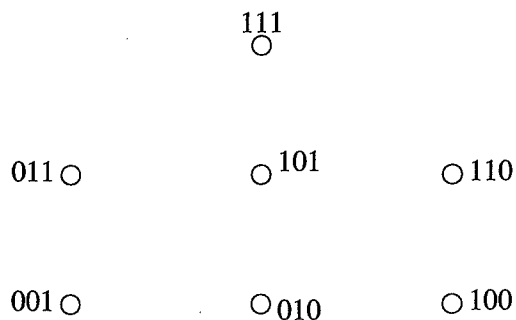
- Geef, met vertaalsleutel, de *argumentvorm* van dit argument.
- Geef een bruikbare (in deel (c)) *strategie* om de geldigheid van het argument uit (a) te controleren.
- De strategie uit (b) heeft het gegeven argument omgezet in een of meer werkargumenten. Controleer deze door het *aaneenschakelen* van standaardargumenten. **N.B.:** Het is soms handig om een formule van de vorm $\neg \exists x Px$ om te zetten in een logisch equivalente formule $\forall x \neg Px$.
- Geef een *verbaal bewijs* van de argumentvorm uit (a) op basis van de strategie in (b) en de schakeltabel(len) in (c).
- Laat zien dat de volgende argumentvorm *niet geldig* is door een geschikte interpretatie te geven in een (klein) universum.

$$\forall x (Bx \rightarrow Hx), \forall x (\neg Bx \rightarrow Wx), \forall x Hx \rightarrow \neg R, \forall x Wx \rightarrow \neg R, \therefore \neg R.$$

2. Orderelaties

Gegeven is de verzameling $Bits^3$, waar $Bits := \{0, 1\}$ en de deelverzameling $A \subseteq Bits^3$ van alle 3-bit woorden met tenminste één 1. De verzameling $Bits^3$ wordt toegerust met de Cartesische orde.

- Teken het *Hasse diagram* van de verzameling A . Goede toelichting scoort. Het bijgevoegd plaatje geeft een redelijke positionering van de punten met het oog op een Hasse diagram.



- Welke elementen zijn *maximaal*, resp. *grootste*, van A ?
- Welke elementen zijn *minimaal*, resp. *kleinste*, van A ?

- (d) Controleer of de ordening op de verzameling A totaal is.

3. Equivalentierelaties

Zij E de verzameling van alle niet-lege letterwoorden van lengte ≤ 5 . Twee woorden w_1, w_2 in E staan in relatie R als ze dezelfde lengte hebben en als ze beide beginnen met een klinker of beide beginnen met een medeklinker.

- (a) Laat zien dat R een *equivalentierelatie* is in E .
 (b) Hoeveel verschillende *equivalentieklassen* zijn door de volgende woorden vertegenwoordigd:
 "ja", "nee", "wel", "niet", "iets", "niets", "schei", "ai", "inf", "ik".
 (c) Geef een *volledig representantensysteem* voor de relatie R in E .

4. Functies, inductie en recursie

- (a) Gegeven is een getypeerde functie $f: V \rightarrow W$. Wat bedoelt men met:

- (i) f is *surjectief*?
 (ii) f is *injectief* (1-1)?
 (iii) f is *totaal*?

Je antwoord mag in woorden of met een formule.

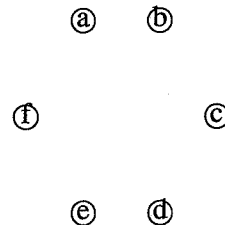
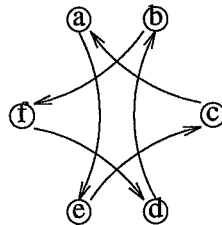
- (b) Een rij reële getallen $(t_n)_{n=1}^{\infty} := \langle t_0, t_1, t_2, \dots \rangle$ is als volgt *recursief gedefinieerd*.

$$t_0 := 1; \quad t_{n+1} := 3t_n - n + 1 \quad (n \geq 0).$$

Bepaal $t_1, \dots, t_4$.

- (c) (Vervolg deel (b)) Toon aan dat $t_n = (5/4) \cdot 3^n + (1/2) \cdot n - 1/4$ voor alle $n \geq 0$.

- (d) Teken in de rechterfiguur de *transitieve afsluiting* van de relatie, die in de linkerfiguur weergegeven is als een gerichte graaf. Goede toelichting scoort.



Een kopie van deze figuur is opgenomen op het aparte multiple choice formulier en mag voor het antwoord worden gebruikt.

Normering:

1a	3	2a	6	3a	5	4a	4	MC	21
1b	3	2b	3	3b	5	4b	3		
1c	5	2c	3	3c	5	4c	6		
1d	5	2d	3			4d	6		
1e	4								
20		15		15		19		21	

Multiple choice: -4 punten per fout.

Totaal = 90; Cijfer = Behaald Totaal / 10 + 1

- ☞ Na afloop van dit tentamen vind je een volledig uitgewerkte versie van het tentamen op blackboard (Knop "Course information", folder #16). De attachment bestaat in postscript en in pdf.

Enkele standaard strategieën

$\rightarrow$ introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$P \rightarrow Q$
Werkargument:	[gegeven premissen], P	Q

Contrapositie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$P \rightarrow Q$
Werkargument:	[gegeven premissen], $\neg Q$	$\neg P$

$\vee$ introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$P \vee Q$
Werkargument:	[gegeven premissen], $\neg P$	Q

Ongerijmde	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\neg P$
Werkargument:	[gegeven premissen], P	$\perp$

$\vee$ eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $P \vee Q$	[gegeven doel]
Werkargument 1:	[gegeven premissen], P	[gegeven doel]
Werkargument 2:	[gegeven premissen], Q	[gegeven doel]

$\forall$ introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\forall x P(x)$
Werkargument:	[gegeven premissen]	$P(y)$

$\exists$ introductie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen]	$\exists x P(x)$
Werkargument:	[gegeven premissen]	$P(t)$

$\forall$ eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $\forall x P(x)$	[gegeven doel]
Werkargument:	[gegeven premissen], $P(t)$	[gegeven doel]

$\exists$ eliminatie	Premissen:	Doel:
Beginargument:	[gegeven premissen], $\exists x P(x)$	[gegeven doel]
Werkargument:	[gegeven premissen], $P(y)$	[gegeven doel]

(Toelichtingen zijn weggelaten)

Enkele standaard argumentvormen

naam	argumentvorm	evt. variant	alternatieve naam
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$ $\therefore q$		' $\rightarrow$ ' eliminatie regel
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$ $\therefore \neg p$		
Disjunctieve toevoeging	p $\therefore p \vee q$	q $\therefore p \vee q$	' $\vee$ ' introductie regel
Conjunctieve toevoeging	p, q $\therefore p \wedge q$		' $\wedge$ ' introductie regel
Disjunctief syllogisme	$p \vee q, \neg q$ $\therefore p$	$p \vee q, \neg p$ $\therefore q$	
Dilemma regel	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ $\therefore r$		' $\vee$ ' eliminatie regel
Contradictieregel	$p \rightarrow \perp$ $\therefore \neg p$		' $\neg$ ' introductie regel
Ketenregel	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$		hypothetisch syllogisme
Contrapositieregel	$p \rightarrow q$ $\therefore \neg q \rightarrow \neg p$		
Al introductie	$Z(y)$ $\therefore \forall x Z(x)$	(toelichting weggelaten)	
Er introductie	$Z(y)$ $\therefore \exists x Z(x)$	(toelichting weggelaten)	
Al eliminatie	$\forall x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	(toelichting weggelaten)	
Er eliminatie	$\exists x Z(x)$ $\therefore Z(y)$	(toelichting weggelaten)	

Leeg blad ten behoeve van apart multiple choice gedeelte

5. Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én (meest) volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M1. Welke kommentaar op volgend argument is meest terzake:

Iedereen heeft soms last van stress. $\therefore$ Er zijn tijden waarop iedereen last heeft van stress.

- o Dit argument is niet geldig want er is een interpretatie mogelijk met ware premissen en onware conclusie.
- o Dit argument is onbepaald, want in sommige universa is de conclusie waar en in andere weer niet.
- o De argumentvorm is een schakeling van vier standaard argumenten: al- en er-eliminatie, gevolgd door er- en al-(her)introductie, i.h.b. is het een geldig argument.
- o De argumentvorm is een standaard argument over omwisselen van kwantoren; i.h.b. is het een geldig argument.

M2. Neem de volgende (geldige) strategie.

	premissen	doel
Beginargument	[premissen]	$\exists x \in V Px \rightarrow Q$
Werkargument	[premissen], $y \in V, Py$	Q

De variabele x komt niet voor in Q , en de variabele y in het werkargument is nieuw en beperkt. Deze strategie is de aaneenschakeling van de strategieën

- o ' $\rightarrow$ ' eliminatie en ' $\exists$ ' introductie.
- o ' $\rightarrow$ ' eliminatie en ' $\exists$ ' eliminatie.
- o ' $\rightarrow$ ' introductie en ' $\exists$ ' introductie.
- o ' $\rightarrow$ ' introductie en ' $\exists$ ' eliminatie.

M3. Een stricte ordening ' $<$ ' in een verzameling V dient te voldoen aan:

- o $\exists x \in V, \neg(x < x)$.
- o $\forall x \in V, \neg(x < x)$.
- o $\forall x \in V \exists y \in V x < y$.
- o $\forall x \in V \forall y \in V x < y$.

M4. De binaire relatie xRy in $\mathbb{Z}$ met voorschrift " 3 deelt $x - y$ " (of, zo je wil: $x - y$ is een drievoud) is:

- o een orderrelatie in $\mathbb{Z}$.
- o een stricte orderrelatie in $\mathbb{Z}$.
- o een equivalentierelatie in $\mathbb{Z}$.
- o -- (geen van deze).

M5. De inverse van een functie f is een functie precies dan als

- o f is injectief (1-1).
- o f is totaal.
- o f is surjectief.
- o -- (dit is altijd waar).

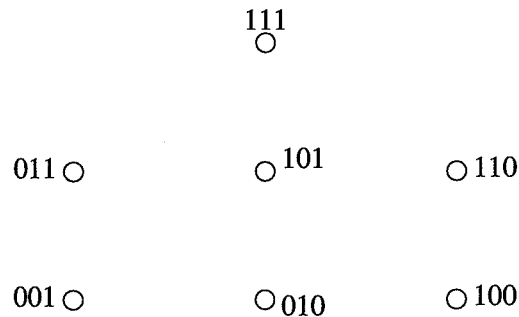
M6. Het principe van sterke inductie met basis b is een strategie die er als volgt uitziet.

	premissen	doel
Beginargument	[rekenregels]	$\forall n \geq b \ Pn$
Werkargument		

Het werkargument is:

- o [rekenregels], $n \geq b$, $\forall k(b \leq k < n \rightarrow P(k)) \therefore P(n)$.
- o [rekenregels], $n \geq b$, $P(n) \therefore \forall k(n < k \rightarrow P(k))$.
- o [rekenregels], $n \geq b$, $\therefore P(n) \rightarrow P(n+1)$.
- o [rekenregels], $n \geq b$, $\therefore \forall k(b \leq k < n \rightarrow P(k))$.

De volgende figuur hoort bij opgave 2(a) en mag voor het antwoord worden gebruikt.



De volgende figuur hoort bij opgave 4(d) en mag voor het antwoord worden gebruikt.

