

Opgelet: er is een apart multiple-choice gedeelte op de laatste pagina. Schrijf op dat blad je naam en lever het mee in met je overige tentamenkopij! Je hebt voor dit tentamen 2h45min tijd.

1. Verzamelingen en Relaties

- (a) Venn-diagrammen en aantallen. Gegeven zijn drie verzamelingen A, B, C met (respectievelijk) 7, 8, 9 elementen in een universum U met 20 elementen. Verder is gegeven dat

$$\#(A \cap B \cap C) = 1,$$

$$\#(A \cap B) = \#(B \cap C) = \#(C \cap A) = 3.$$

Bepaal volgende aantallen met behulp van *Venn-diagrammen*:

(i) $\#(A \cup B \cup C)$.

(ii) $\#((A' \cap B') \cup C')$.

De rest van deze opgave handelt over samengestelde en inverse relaties. (Het multiple choice blad bevat de aanzet voor enkele Venn diagrammen.) We beschikken over de verzamelingen

$$\text{Weekdagen} := \{ma, di, wo, do, vr, za, zo\},$$

$$\text{Weekenddagen} := \{za, zo\},$$

$$\text{Werkdagen} := \text{Weekdagen} \setminus \text{Weekenddagen}.$$

Voer in: de binaire relatie $R := \text{VolgendeWerkdag}$, gegeven door opsomming:

$$\{ \langle ma, di \rangle, \langle di, wo \rangle, \langle wo, do \rangle, \langle do, vr \rangle, \langle vr, ma \rangle, \langle za, ma \rangle, \langle zo, ma \rangle \}.$$

- (b) Stel de relatie R voor door middel van Venn-diagrammen en door middel van een 0/1 matrix.
(c) De relatie R is niet reflexief, niet symmetrisch, en niet transitief. Geef telkens aan wat er schort.
(d) Voer in: de binaire relatie $S := \text{Eergisteren}$, gegeven door de verzameling

$$\{ \langle ma, za \rangle, \langle di, zo \rangle, \langle wo, ma \rangle, \langle do, di \rangle, \langle vr, wo \rangle, \langle za, do \rangle, \langle zo, vr \rangle \}.$$

Teken de inverse relatie S^{-1} van S met behulp van Venn-diagrammen.

- (e) Geef één paar dagen $\langle x, y \rangle$ in de relatie $R \circ S$ maar niet in de relatie $S \circ R$.

2. Propositie- en Predicatenlogica

- (a) Vertalen en waarheidstabellen. We geven twee propositielogische argumenten. Geef in beide gevallen een *vertaalsleutel* en een *vertaling* volgens de sleutel. Ga tenslotte na met behulp van waarheidstabellen welke van de argumenten *geldig* zijn.
- (i) Als het dag is en het niet bewolkt is, dan is het zonnig. $\therefore$ Als het dag is, dan is het bewolkt of zonnig.
- (ii) Als het niet regent, gaan we op stap. Regent het en waait het, dan gaan we niet op stap. Het regent maar het waait niet. $\therefore$ We gaan niet op stap.

De rest van deze opgave gaat over predicatenlogica.

- (b) Laat zien dat de volgende argumentvorm correct is.

$$\begin{aligned} &\exists x (Q_1x \vee Q_2x), \\ &\forall x (Q_1x \rightarrow Px), \\ &\forall x (Q_2x \rightarrow Px), \\ &\therefore \exists x Px \end{aligned}$$

Gebruik (in of andere volgorde) de volgende standaard argumentvormen:

al-eliminatie regel, of-eliminatie regel, er-eliminatie regel, er-introductie regel.

(c) We bekijken het volgende argument, bedoeld voor een universum van dieren.

- (1) Alle dieren die kunnen vliegen hebben vleugels.
- (2) Alle dieren die geen poten hebben, hebben geen vleugels.
- ($\therefore$) Als er dieren zijn die geen poten hebben, dan zijn er dieren die niet kunnen vliegen.

Beantwoord nu de volgende vragen.

- (i) Geef, met vertaalsleutel, de logische vorm van vorig argument. Je mag de onderliggende woorden als sleutel nemen. Gebruik onbeperkte kwantoren.
- (ii) Geef een strategie op basis van $\rightarrow$ introductie en $\exists$ eliminatie om te verifiëren dat dit argument correct is.
- (iii) Geef nu een bewijs volgens je strategie uit (ii). Je mag dit bewijs geven in woorden of in tabelvorm.

3. Orderrelaties, Functies en Equivalentierelaties

(a) Cartesische ordening. Gegeven zijn twee partiële ordeningen, $\leq_1$ in V_1 en $\leq_2$ in V_2 . Vervolledig het volgende voorschrift voor de Cartesische ordening $\leq$ op de productverzameling $V := V_1 \times V_2$.

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 (<x_1, x_2> \leq <y_1, y_2> \leftrightarrow$$

(b) Zij $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \dots\}$ voorzien van de standaard ordening en neem nu de Cartesische ordening in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Geef bij de verzameling

$$A := \{<x, y> : x, y \in \mathbb{N}, 3 \leq x + y \leq 6\}$$

in $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alle minimale elementen. Is er een kleinste element in A ?

De rest van deze opgave gaat over Functies en Equivalentierelaties. Neem de verzameling $V := \{0, 1, 2, \dots, 99\}$ en de functie $f: V \rightarrow \text{Cijfers}$ met voorschrift

$f(x)$ is de som van de cijfers van het getal x . Indien de som van de cijfers een getal ≥ 10 is, neem dan van dit getal opnieuw de som van de cijfers.

N.B. $\text{Cijfers} := \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$.

Voorbeeld: berekening van $f(94)$:

$$9+4 = 13, 1+3 = 4, \text{ dus } f(94) = 4.$$

Zij R de equivalentierelatie in V die hoort bij f .

- (c) Controleer of de functie f al dan niet injectief/surjectief is.
- (d) Geef elk van de equivalentieklassen $[0]$, $[1]$, $[2]$ van R weer door opsomming.
- (e) Hoeveel verschillende equivalentieklassen heeft R ?
- (f) Geef een volledig representantensysteem voor R .

4. Inductie en recursie

(a) Rijen. Een rij reële getallen $(t_n)_{n=2}^{\infty}$ is als volgt recursief gedefiniëerd.

$$t_2 := 4; \quad t_{n+1} := t_n + 2n + 2 \quad (n \geq 2).$$

(i) Bepaal de eerste vijf termen van de rij $(t_n)_{n=2}^{\infty}$.

(ii) Bewijs met inductie dat $t_n = n^2 + n - 2$ voor alle $n \geq 2$.

(b) Transitieve afsluiting. Gegeven is een verzameling A met 5 punten en een binaire relatie R in A (in matrixvorm):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Geef de matrix van de transitieve afsluiting van R . Suggestie: maak de voorstelling via Venn-diagrammen.

Normering:

1a	6	2a	8	3a	3	4a	7	M	12
b	4	b	5	b	4	b	7		
c	3	c	6	c	3				
d	2	d		d	3				
e	3			e	3				
				f	3				
18		19		19		14		20	

$$\text{Cijfer} = \text{Totaal}/10 + 1$$

Multiple choice: -3ptn per fout antwoord.

Enkele standaard argumentvormen

naam	argumentvorm	evt. variant	alternatieve naam
Modus Ponens	$p \rightarrow q, p$ $\therefore q$		' $\rightarrow$ ' eliminatie regel
Modus Tollens	$p \rightarrow q, \neg q$ $\therefore \neg p$		
Disjunctief syllogisme	$p \vee q, \neg q$ $\therefore p$	$p \vee q, \neg p$ $\therefore q$	
Dilemma regel	$p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow r$ $\therefore r$		' $\vee$ ' eliminatie regel
Contradictieregel	$p \rightarrow \perp$ $\therefore \neg p$		' $\neg$ ' introductie regel
Ketenregel	$p \rightarrow q, q \rightarrow r$ $\therefore p \rightarrow r$		hypothetisch syllogisme
Contrapositiereg	$p \rightarrow q$ $\therefore \neg q \rightarrow \neg p$		

De argumentvormen van al/er eliminatie/introductie kun je op basis van de naam zelf invullen!

Enkele standaard strategieën

' $\rightarrow$ ' introductie

Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \rightarrow q$
Werkargument:	[gegeven premissen], p	q

Contrapositie

Beginargument:	[gegeven premissen]	$p \rightarrow q$
Werkargument:	[gegeven premissen], $\neg q$	$\neg p$

' $\neg$ ' introductie

Beginargument:	[gegeven premissen]	$\neg p$
Werkargument:	[gegeven premissen], p	$\perp$

' $\vee$ ' eliminatie

Beginargument:	[gegeven premissen], $p \vee q$	[gegeven doel]
Werkargument 1:	[gegeven premissen], p	[gegeven doel]
Werkargument 2:	[gegeven premissen], q	[gegeven doel]

naam, studierichting & jaar:

14-02-07

Multiple-choice gedeelte

- Bij iedere vraag is precies één van de onderdelen juist én volledig.
- Het antwoord (aangekruist of zwartgemaakt bolletje) hoeft niet te worden toegelicht.

M1. Een partitie van een verzameling V is

- o een relatie in een collectie niet-lege deelverzamelingen van V .
- o een collectie niet-lege deelverzamelingen van V die onderling disjunct zijn.
- o een collectie niet-lege deelverzamelingen van V zo dat ieder element van V tot precies één van die delen behoort.
- o een collectie niet-lege deelverzamelingen van V waarvan de vereniging heel V is.

M2. De persoonsrelatie *IsGrootmoederVan* wordt weergegeven als

- o de inverse relatie van *IsGrootvaderVan*.
- o de samenstelling *IsVaderVan* $\circ$ *IsMoederVan*.
- o de samenstelling *IsMoederVan* $\circ$ *IsVaderVan*.
- o de vereniging van de samengestelde relaties *IsVaderVan* $\circ$ *IsMoederVan* en *IsMoederVan* $\circ$ *IsMoederVan*.

M3. Een contradictie in de propositielogica is een formule

- o die onwaar is terwijl de atomaire onderdelen waar zijn.
- o die altijd onwaar is ongeacht de waarheid van de atomaire onderdelen.
- o die de logische vorm van een slecht geformuleerde uitspraak weergeeft.
- o van de gedaante $p \rightarrow \neg p$.

M4. De formule $\forall x(Px \vee Qx)$ is logisch equivalent met:

- o $\forall xPx \vee \forall xQx$.
- o $\forall xPx \wedge \forall xQx$.
- o $\forall x(\neg Px \rightarrow Qx)$.
- o -- (geen van deze).

M5. Een maximaal element p van een verzameling A in een verzameling V met partiële ordening $\leq$ moet voldoen aan:

- o $p \in A$ en $\forall a \in A \neg p \leq a$.
- o $p \in A$ en $\forall a \in A (p \leq a \rightarrow p = a)$.
- o $p \in A$ en $\forall a \in A (a \leq p)$.
- o $p \in A$ en $\forall a \in A (a < p)$.

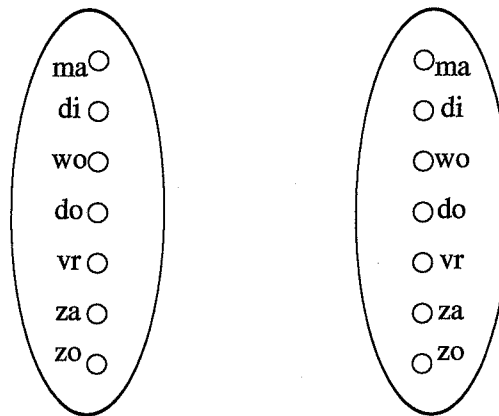
M6. Zij R een equivalentierelatie in een verzameling V . Een volledig representantensysteem van R is

- o een deelverzameling van V met uit elke R -equivalentieklasse één element.
- o Een verzameling van representanten waarbij elke R -equivalentieklasse vertegenwoordigd is.
- o een partitie van V horend bij de equivalentieklassen van R .
- o een opdeling van V in twee deelverzamelingen: een klasse die bestaat uit elementen in relatie met p en een klasse die bestaat uit met elementen niet in relatie met p .

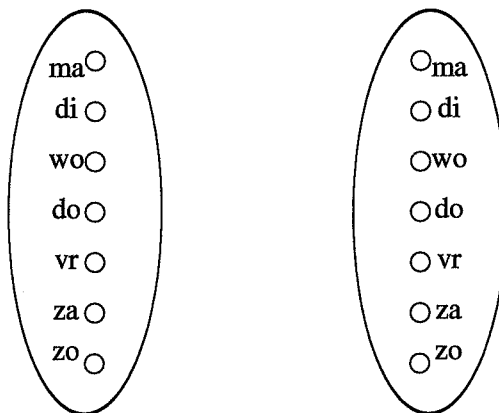
M7. Het recursieve voorschrift voor $n!$ (n -faculteit, $n \geq 1$) is:

- o $1! := 1$ en $n! := (n+1)! \cdot n$.
- o $1! := 1$ en $(n+1)! := n! \cdot n$.
- o $1! := 1$ en $(n+1)! := n! \cdot (n+1)$.
- o $1! := 1$ en $(n+1)! := n! + (n+1)$.

Venn-diagrammen ten behoeve van opgave 1(b-e).



onderdeel(b): relatie R



onderdeel(d): inverse relatie van S